ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 26, n. 2, 2018

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2018

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 26, n. 2, 2018

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2018

In copertina:
Logo dell’Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell’anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna.
Logo dell’Associazione “Incontri con la matematica” fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell’articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D’Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Indice

L'equazione di Laplace: Una riflessione storico-epistemologica

Miglena Asenova[1] e Sergio Polidoro[2]
[1]*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo*
[2]*Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia*

Abstract. *The equation that at present time is known as "Laplace's equation" achieved considerable visibility thanks to the publication of the famous work of Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace is acknowledged as the developer of an analytical theory to deal with problems of astronomy understood as "celestial mechanics". In this context, the equation models the problem of gravitational attraction that a spheroid exerts on a generic material point. However, the equation was already known to Leonhard Euler, who had obtained it in 1752 in a work in which he describes the motion of an incompressible fluid. Adopting an epistemological perspective and comparing the contributions of Euler and Laplace, in this article we discuss the question of whether it is correct to associate only Laplace's name with the equation we are considering.*

Keywords: Laplace's equation, celestial mechanics, fluid mechanics, potentials, partial derivative equations.

Sunto. *L'equazione oggi detta "di Laplace" raggiunse una notevole visibilità grazie alla pubblicazione della famosa opera di Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace ebbe il merito di mettere a punto una teoria analitica per trattare problemi dell'astronomia intesa come "meccanica celeste". In quel contesto, l'equazione modellizza il problema dell'attrazione gravitazionale che uno sferoide esercita su un punto materiale generico. Tuttavia, l'equazione era già nota a Leonhard Euler, che l'aveva ottenuta nel 1752 in un lavoro nel quale descrive il moto di un fluido incomprimibile. Adottando una prospettiva epistemologica e mettendo a confronto i contributi di Euler e di Laplace, si discute di seguito la questione se sia corretto associare solamente il nome di Laplace all'equazione che stiamo considerando.*

Parole chiave: equazione di Laplace, meccanica celeste, meccanica dei fluidi, potenziali, equazioni alle derivate parziali.

Resumen. *La ecuación conocida hoy en día como "de Laplace" alcanzó una visibilidad considerable gracias a la publicación de la famosa obra de Pierre-Simon Laplace "Traité de Mécanique Céleste" (1799). Laplace tuvo el mérito de desarrollar una teoría analítica para tratar problemas de astronomía entendida como "mecánica celeste". En ese contexto, la ecuación modela el problema de la atracción gravitacional que ejerce un esferoide sobre un punto material genérico. Sin embargo, la ecuación ya era conocida por Leonhard Euler, quien la había obtenida en 1752 en una obra en la cual describe el movimiento de un fluido incompresible.*

Adoptando una perspectiva epistemológica y comparando las contribuciones de Euler y de Laplace, analizamos a continuación la pregunta de si es correcto asociar únicamente el nombre de Laplace a la ecuación que estamos considerando.

Palabras clave: ecuación de Laplace, mecánica celeste, mecánica de los fluidos, potencial, ecuaciones a las derivadas parciales.

1. Introduzione

L'equazione di Laplace

$$\Delta V(x,y,z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

è uno degli oggetti di studio più importanti dell'Analisi matematica, sia per le notevoli proprietà delle sue soluzioni, sia perché compare nella modellizzazione di importanti fenomeni fisici di natura diversa. Dal punto di vista storico, essa si colloca cronologicamente dopo l'equazione di d'Alembert della corda vibrante e prima dell'equazione di Fourier della propagazione del calore.[1]

L'equazione (1) compare, in coordinate sferiche, nel 1782 in un'opera di Pierre-Simon Laplace,[2] che ebbe il merito di mettere a punto una teoria analitica utile per trattare problemi dell'astronomia intesa come "meccanica celeste", basata sui fondamenti enunciati da Newton nei *Principia* (1687).[3] In quel contesto, l'equazione interviene nello studio del problema dell'attrazione gravitazionale che uno sferoide esercita su un punto materiale generico.

Sia Bottazzini sia Grattan Guinnes osservano però che l'equazione oggi detta "di Laplace" era già nota a Euler, che l'aveva ottenuta nel 1752 in un lavoro nel quale descrive il moto di un fluido incomprimibile;[4] entrambi gli storici evidenziano il fatto che Laplace doveva conoscere il lavoro di Euler sulla dinamica dei fluidi:

> Laplace (…) riuscì nella determinazione della V nel caso di uno sferoide arbitrario, assumendo che la V, per i punti interni ed esterni al corpo, verificasse l'equazione $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ che gli era certamente nota da prima per essere già nota a Euler. (Bottazzini, 1981, p. 243)

> His treatment of the motion of fluids was similarly Eulerian, in that he imagined

---

[1] Per una trattazione esauriente della questione storico-epistemologica cosiddetta della corda vibrante e dell'equazione del calore si veda Bottazzini (1981, pp. 25–38); per l'equazione del calore si vedano anche Grattan-Guinnes (1990, pp. 587–608) e Archibald (2003, pp. 8–10).

[2] Pierre-Simone Laplace (1749, Beaumont-en-Auge – 1827, Parigi).

[3] Isaac Newton (1642, Woolsthorpe-by-Colsterworth – 1727, Londra).

[4] La prima pubblicazione dell'opera di Euler che contiene questo risultato, e alla quale ci riferiamo in questo lavoro, avvenne solo nove anni più tardi, nel 1761; nel 1752 Euler fece solo un'esposizione in forma orale sull'argomento all'Accademia di Berlino. In realtà, la memoria del 1761 è la prima parte di un lavoro più ampio, a cui faranno seguito altre due parti (Euler, 1770 e Euler, 1771).

> (...) differential parallelepipeds of fluid as his means of deriving the equations of fluid flow. [La sua trattazione del moto dei fluidi era simile a quella euleriana nell'immaginare (...) parallelepipedi differenziali di fluido come mezzo per derivare le equazioni del flusso del fluido.][5] (Grattan-Guinness, 1990, p. 318)

> (...) in volume 1 of the *Mécanique céleste* (...) among the various properties the most famous is the "Laplace-equation" (known before Laplace): $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$. [(…) nel volume 1 della *Mécanique céleste* (…) tra le varie proprietà la più famosa è la "equazione di Laplace", (nota prima di Laplace): $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$.] (Grattan-Guinnes, 1990, p. 332)

Laplace non fa cenno a questo fatto ma, d'altra parte, la quasi totale mancanza di riferimenti puntuali alle fonti a cui stava attingendo è un aspetto che gli storici gli contestano da sempre. Pur trattandosi di una prassi per nulla fuori dal comune per l'epoca, sembra che Laplace sia stato particolarmente negligente in tale senso (Bacharach, 1883, p. 4; Rouse Ball, 1908, pp. 422, 426; Grattan-Guinnes, 1990, p. 317).

In questo articolo proponiamo una riflessione sull'origine dell'equazione di Laplace, adottando una prospettiva storico-epistemologica. In particolare, seguendo le indagini di alcuni dei più importanti storici della matematica, mettiamo a confronto il contributo di Euler e il contributo di Laplace, al fine di stabilire quale sia il modo corretto di riferirsi a essa.

Lo scopo del presente lavoro è quello di organizzare i risultati delle ricerche già compiute in questo campo in una riflessione unitaria, il cui punto focale sia l'equazione che viene usualmente detta di Laplace, e di trarre le eventuali conclusioni. Crediamo che esso possa essere d'interesse per chiunque abbia una discreta conoscenza dei contenuti matematici coinvolti e abbia la curiosità di conoscere le origini della famosa equazione.

2. L'equazione "di Laplace" nell'opera di Euler

Come abbiamo già osservato nell'introduzione, l'equazione in (1), che porta oggi il nome di "equazione di Laplace", era già conosciuta prima che Laplace la rendesse nota nei suoi lavori relativi all'astronomia; essa fa la sua prima comparsa nell'articolo *Principia motus fluidorum* di Leonhard Euler,[6] sulla dinamica dei fluidi, pubblicato nel 1761. Al fine di contestualizzare meglio la comparsa dell'equazione (1) nell'opera di Euler, accenniamo brevemente ai suoi lavori precedenti sulla fluidomeccanica, di cui il *Motus fluidorum* è il punto d'arrivo.

Nel *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides* (1757a), Euler sviluppa i principi generali sui quali si basa l'idrostatica. Egli afferma in particolare che un fluido è in equilibrio se la sua superficie è soggetta in ogni

[5] Tutte le traduzioni in italiano sono nostre.
[6] Leonhard Euler (1707, Basilea – 1783, San Pietroburgo).

punto alla stessa forza normale (Euler, 1757a, p. 226). Successivamente, Euler affronta il problema di come determinare la pressione che deve agire su ogni punto della superficie di un fluido in equilibrio, portando implicitamente in evidenza l'importanza delle condizioni al contorno per la soluzione delle equazioni differenziali. Questo argomento verrà successivamente ripreso nella seconda memoria del 1757 (1757b). Infine, Euler dimostra che la forza di gravità esercitata da un centro fisso è funzione della distanza e che le forme che si realizzano sotto l'azione della forza di gravità possono approssimare quelle dei pianeti.

Nel *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757b), Euler prosegue il precedente lavoro e dimostra l'esistenza di una soluzione delle equazioni del moto anche in mancanza di equilibrio. In questo contesto viene assunta come ipotesi l'irrotazionalità del vettore velocità. Euler mostra in particolare che non tutti i vettori velocità ammettono potenziale, esibendo il vortice semplice che costituisce un esempio di moto che avviene in assenza di un potenziale, anche se la velocità verifica la condizione di irrotazionalità.

Nel *Principia motus fluidorum* (1761), Euler tratta i fluidi incomprimibili, sotto la condizione di continuità. Il suo intento in questo lavoro è chiaramente espresso nel paragrafo 6 dell'articolo in questione:

> In characterem igitur motuum possibilium, quicunque scilicet salua impenetrabilitate in fluido in esse possunt, inquirere hic constitui. Fluidum autem eius indolis assumo, vt neque in arctius spatium compelli se patiatur, neque eius continuitas interrumpi possit: statuo nimirum in medio fluidi durante motu nullum spatium a fluido vacuum relinqui, sed continuitatem in eo iugiter censeruari. [Ho deciso di indagare qui il carattere dei moti possibili dei fluidi, salva restando l'impenetrabilità in essi. Assumo che il fluido sia di carattere tale che non sia possibile comprimerlo in uno spazio minore e che la sua continuità non possa essere interrotta.] (Euler, 1761, §6)

Vediamo di seguito come Euler giunge all'equazione oggetto della nostra trattazione.

Nella prima parte del testo, Euler stabilisce quali sono le condizioni che devono valere affinché il moto sia possibile sotto le ipotesi iniziali di incomprimibilità e continuità. Indicando con u, v, w le componenti della velocità lungo gli assi, Euler mostra che tali condizioni sono soddisfatte solo se, in ogni istante, in ogni punto del fluido, "le tre velocità u, v, w sono funzioni delle coordinate x, y, z che verificano la seguente condizione:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\text{" (Euler, 1761, §36).} \tag{2.1}$$

Successivamente, Euler considera l'effetto della pressione sul moto del fluido,[7] e da questo deduce che il campo vettoriale della velocità è esatto,

[7] Notiamo che già Aristotele (ca. 384 a. C. – 322 a. C.) e Archimede (ca. 287 a. C. – 212 a. C.) avevano intuito che esistesse una grandezza come quella che oggi si chiama pressione, ma

essendo

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.2.1}$$

Di conseguenza esiste un potenziale S del campo vettoriale

$$\nabla S=(u,v,w). \tag{2.2.2}$$

Combinando le due equazioni si trova quindi

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0. \tag{2.3}$$

Euler conclude la trattazione esibendo soluzioni dell'equazione (2.3) nella forma di polinomi di grado n rispetto alle variabili x, y, z.

Come abbiamo notato all'inizio di questo paragrafo, nei lavori precedenti sulla dinamica dei fluidi Euler aveva mostrato che non tutti i moti sono descritti da velocità che ammettono un potenziale e aveva evidenziato la necessità di porre opportune condizioni al contorno del fluido. All'inizio del *Motus fluidorum* Euler scrive che intende trattare il caso dei fluidi incomprimibili sotto condizioni di continuità e poco più avanti afferma che

> Theoria enim ad fluida huius naturae accommodata, non adeo difficile erit, eam ad fluida quoque, quorum densitas est variabilis, et que ne continuitatem quidem necessario requirunt, extendere [Una volta che la teoria è stata adattata a fluidi di questa natura, non sarà difficile estenderla a fluidi la cui densità è variabile e che non richiedano necessariamente la continuità] (Euler, 1761, §6).

L'equazione (2.3) esprime dunque la condizione in cui il moto stazionario di un fluido incomprimibile avviene in presenza di un potenziale, sotto la condizione di continuità. Dopo aver ottenuto tale equazione, Euler la usa per determinare la pressione che agisce sulla superficie del fluido e che, come egli aveva già osservato (Euler, 1757a), deve essere uguale in ogni punto e normale alla superficie. L'equazione (2.3) è dunque un punto di arrivo dei lavori precedenti di Euler sulla meccanica dei fluidi, ma è anche il punto di partenza per la teoria più generale della fluidodinamica, in cui vengono considerati anche casi più complessi, come diventa evidente nella seconda parte del trattato sul moto dei fluidi (Euler, 1770), in cui Euler tratta lo stesso argomento per fluidi la cui densità è variabile.

---

solo nel corso del Rinascimento, soprattutto Pascal (1623 – 1662) e Torricelli (1608 – 1647) hanno capito che essa andava trattata come grandezza a parte. Uno dei grandi risultati della fisica matematica del XVIII secolo è stato invece quello di distinguere la pressione da altre nozioni come la massa o il peso, nonché la caratterizzazione del suo ruolo nella determinazione delle condizioni di equilibrio di un fluido (Grattan-Guinness, 1990, p. 662). A Euler va riconosciuto il merito di aver sviluppato pienamente il concetto di pressione e di aver precisato il suo ruolo nella dinamica dei fluidi.

67. Commodiſſime igitur incipiemus ab ipſa quantitate integrali, cuius differentiale eſſe oportet formulam $udx + vdy + wdz$ poſito tempore conſtante. Sit ergo S hoc integrale, quod erit functio ipſarum x, y et z, tempore t in quantitatibus conſtantibus involuto; atque ſi haec quantitas S differentietur, coefficientes differentialium dx, dy et dz ſtatim praebebunt celeritates u, v et w, quae quidem praeſenti tempore conveniant puncto fluidi λ, cuius coordinatae ſunt x, y et z. Quaeſtio autem huc redit: vt definiatur, quales functiones ipſarum x, y et z, pro S aſſumi debeant vt etiam fiat $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$; ſeu cum ſit $u = \frac{dS}{dx}$, $v = \frac{dS}{dy}$ et $w = \frac{dS}{dz}$, vt ſit $\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0$.

Figura 1. Il passo del *Principia motus fluidorum* di Euler in cui compare l’equazione (Euler, 1761, §67).

3. L’equazione (1) nell’opera di Laplace

La prima volta in cui Laplace pubblica l’equazione che successivamente prenderà il suo nome è nella memoria *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (1782) in cui essa appare in coordinate polari sferiche. In questo lavoro egli espone “una teoria dell’attrazione degli sferoidi e della forma dei pianeti più generale e più semplice di quelle note finora” (Laplace, 1782, pp. 341–342). Laplace scrive inoltre, riferendosi all’equazione (1) in coordinate sferiche, che nel testo in questione egli “considera le attrazioni tra sferoidi qualsiasi” e le fa “dipendere da un’equazione alle differenze parziali”,[8] che è alla base delle sue ricerche sulla forma dei pianeti e che lo ha condotto ad alcuni risultati generali riguardo allo sviluppo in serie delle attrazioni degli sferoidi:

> En supposant ensuite les sphéroïdes fort approchants de la sphère et en combinant ces résultats avec une équation différentielle qui a lieu à leur surface, et dont j’ai tiré autrefois les lois de la pesanteur sur les sphéroïdes homogènes en équilibre, je

[8] Oggi diciamo “equazioni alle derivate parziali”. All’epoca di Laplace non erano ancora state precisate né la nozione di continuità né quella di limite e il problema della distinzione tra dominio discreto e dominio continuo non era ancora considerato di centrale importanza. Si aveva forse ancora in mente un modello sostanzialmente discreto anche se tendente a qualcosa di ancora non definito, al quale si applicavano i metodi di derivazione elaborati da Leibniz e da Newton. In particolare, l’operazione inversa di quella che all’epoca era l’integrazione si chiamava differenziazione.

> parviens à une expression en séries, générale et simple, des attractions des sphéroïdes quelconques très peu différents de la sphère, expression qui se termine toutes les fois que l'équation de leur surface est finie et rationnelle. [Supponendo quindi che gli sferoidi sono molto bene approssimabili dalla sfera e congiungendo questi risultati con un'equazione differenziale che ha luogo sulla loro superficie, e dalla quale trassi già in altra occasione le leggi della gravità sulla superficie degli sferoidi omogenei in equilibrio, pervengo a un'espressione in serie, generale e semplice, delle attrazioni di sferoidi qualsiasi molto diversi dalla sfera, espressione che termina tutte le volte che l'equazione sulla loro superficie è finita e razionale.] (Laplace, 1782, p. 342)

Torneremo su questo argomento alla fine del paragrafo, quando ci occuperemo della ricerca delle soluzioni dell'equazione.

Nell'articolo *Mémoire sur la Théorie de l'Anneau de Saturn* del 1787, l'equazione (1) compare per la prima volta nella sua forma più nota, in coordinate cartesiane, e viene utilizzata per determinare la forma dell'anello di Saturno,[9] basandosi sulla teoria della gravitazione universale, "che si accorda così bene con i fenomeni e le figure dei corpi celesti" (Laplace, 1787, p. 1). Laplace suppone infatti, "come i geometri hanno fatto nelle loro ricerche sulle figure degli astri", che l'anello di Saturno sia ricoperto di un sottile strato fluido in stato di equilibrio, il quale determina la sua forma e che impedisce che le sue particelle, soggette alla forza di gravità esercitata da Saturno, finiscano con l'unirsi alla massa del pianeta, facendo sì che, a partire dalle particelle più vicine a Saturno, l'anello scompaia gradualmente (Laplace, 1787, p. 2). Laplace conclude dunque che "C'est par les conditions de l'équilibre de ce fluide que la figure de l'anneau doit être déterminée [È attraverso le condizioni di equilibrio del fluido che la figura dell'anello deve essere determinata]" (Laplace, 1787, p. 2).

Nonostante buona parte dei risultati relativi all'uso dell'equazione (1) fossero già stati pubblicati nelle memorie appena citate, è nell'opera principale di Laplace, il *Traité de Mécanique céleste* (1799),[10] che troviamo raccolto

---

[9] Il fatto che non si trattasse di un unico, ma di più anelli, era già noto all'epoca; infatti, Huygens aveva osservato già nel 1655 che l'anello era in realtà diviso in due parti, ma Laplace afferma che in futuro telescopi più potenti potrebbero mostrare che in realtà gli anelli sono più numerosi (Laplace, 1787, p. 1); forse per questo motivo egli preferisce parlare comunque di "anello" piuttosto che di "anelli". Ulteriori divisioni degli anelli furono scoperte nel 1837, per opera di Johann Encke (1791 – 1865) e nel 1850, per opera di George Phillips Bond (1825 – 1865); oggi si sa che gli anelli di Saturno sono molto numerosi e si usa dividerli in sette fasce.

[10] *Il Traité de Mécanique céleste* è un'opera in cinque volumi che esce a più riprese, tra il 1799 e il 1825; in questo lavoro facciamo riferimento ai primi due volumi, entrambi pubblicati nel 1799; il primo volume comprende i libri I e II, mentre il secondo volume comprende i libri III, IV e V. Il libro I tratta le leggi generali dell'equilibrio e del movimento; il libro II si occupa della legge di gravitazione universale e del movimento dei corpi; i libri III, IV e V trattano questioni relative al singolo corpo celeste, come la sua forma (libro III), le oscillazioni del mare e dell'atmosfera (libro IV) nonché il suo movimento intorno al proprio centro di gravità (libro V).

tutto il suo pensiero relativo alla matematica applicata all'astronomia ed è lì che esse acquisiscono il loro pieno significato. È stata tale opera a rendere nota l'equazione in questione a un pubblico vastissimo, che andava ben oltre i confini nazionali francesi, ed è a quell'opera che faremo riferimento nella nostra trattazione successiva.

Il proposito che Laplace persegue nel *Traité* è quello di condurre da un unico punto di vista le ricerche che, dopo Newton, hanno ricondotto alla forza di gravità tutti i fenomeni noti del "sistema del mondo", elaborando una teoria che fosse in grado di bandire una volta per tutte le equazioni empiriche dallo studio dei fenomeni astronomici:

> Je me propose de présenter sous un même point de vue, ces théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages, et tout l'ensemble embrassant tous les résultats de la gravitation universelle, sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides (...). L'Astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problème de mécanique (...); sa solution dépend à-la-fois de l'exactitude des observations et de la perfection de l'analyse, et il importe extrêmement d'en bannir tout empirisme, et de la réduire à n'emprunter de l'observation, que les données indispensables. [Mi propongo di presentare sotto un unico punto di vista queste teorie apparse in un grande numero di opere e tutto l'insieme concernente i risultati della gravitazione universale sull'equilibrio e sui movimenti dei corpi solidi e fluidi (...). L'Astronomia, considerata nella maniera più generale, è un grande problema di meccanica (...); la sua soluzione dipende a volte dall'esattezza delle osservazioni e dalla perfezione dell'analisi ed è estremamente importante bandire da essa tutto l'empirismo e portarla a prendere in prestito dall'osservazione null'altro che i dati indispensabili.] (Laplace, 1799, II, p. 1)

Di seguito esaminiamo alcuni passaggi della sezione 11 del II libro del primo volume del *Traité*, nella quale viene trattato l'argomento dell'attrazione gravitazionale esercitata da uno sferoide su un punto materiale[11] e nella quale Laplace descrive il metodo che coinvolge l'equazione in questione.

Dopo aver indicato con x, y, z le coordinate di un generico punto di massa m che viene attratto dallo sferoide di massa M, Laplace denota con dM una generica molecola di tale corpo,[12] le cui coordinate sono indicate con x', y', z'. Se inoltre ρ è la densità di massa (che è una funzione di x', y', z'), allora risulta $dM = \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'$. Inoltre, la componente della forza esercitata dalla molecola di massa dM, parallela all'asse delle x e diretta verso l'origine, sarà data da

$$\frac{\rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot (x - x')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.1}$$

[11] Il secondo libro del *Traité* è dedicato alla forza di gravità universale e ai movimenti dei centri di gravità dei corpi celesti; in questo senso il punto materiale considerato è la massa di un corpo celeste, concentrata nel proprio centro di gravità.

[12] In realtà dM è la massa della molecola e non la molecola, ma Laplace identifica i due concetti, come era prassi dell'epoca.

In questo punto della trattazione, Laplace introduce la "*funzione* V" che,[13] a partire dai successivi lavori di George Green,[14] prese il nome di *funzione potenziale*:

$$V = \frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}. \tag{3.2}$$

Laplace riconosce che l'espressione (3.1) è la derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione V

$$\frac{-d}{dx}\frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}; \tag{3.3}$$

pertanto, il potenziale della forza di gravità esercitata dal corpo di massa M sul punto di massa m viene definito come:[15]

$$V(x,y,z) = \int_M \frac{\rho \cdot dx\prime \cdot dy\prime \cdot dz\prime}{\sqrt{(x-x\prime)^2+(y-y\prime)^2+(z-z\prime)^2}}. \tag{3.4}$$

Laplace prosegue poi affermando che l'azione (cioè la forza di gravità) esercitata dallo sferoide sul punto di massa m, si ottiene calcolando le derivate parziali di V rispetto alle variabili x, y, z.

L'equazione differenziale oggetto del presente lavoro compare a questo punto della trattazione. Laplace infatti denota con ζ la funzione

$$((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.5}$$

Con questa notazione si ha

$$V = \int \zeta \cdot \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz'. \tag{3.6}$$

Laplace osserva che:[16]

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = \int \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot \{\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right)\}. \tag{3.7}$$

---

[13] L'impiego di questo tipo di funzioni non era nuovo negli studi di natura astronomica e già Lagrange ne aveva fatto uso in una sua opera del 1774 (Archibald, 2003, p. 10); torneremo su questo aspetto nel paragrafo successivo.

[14] George Green (1793, Sneinton, Nottingham – 1841, Nottingham).

[15] Come era consueto ai tempi di Laplace, il simbolo di integrale indica che si intende eseguire un'operazione di somma su un numero non precisato, ma molto elevato, di addendi. Infatti, anche se la parola "integrale" come sinonimo di somma di infiniti "indivisibili" è attribuibile a Thomas Bradwardine (ca. 1290 – 1349) (D'Amore & Sbaragli, 2018), la nozione di integrale venne formalizzata correttamente, come è noto, solo nel secolo successivo. La correttezza dei calcoli che portano alle formule introdotte da Laplace, e che coinvolgono l'integrale di una funzione illimitata, è stata convalidata dai successivi lavori di Poisson (1813) e di Green (1828), in cui verrà mostrato che l'equazione (1) è un caso particolare dell'equazione di Poisson, anche se la dimostrazione considerata pienamente soddisfacente dal punto di vista matematico sarà fornita solo da Gauss (1840).

[16] In questo passaggio lo scambio tra il simbolo di derivata e il simbolo di integrale si giustifica tenendo presente che il simbolo di integrale che usa Laplace denota una somma "finita" (anche se di un numero elevato) di addendi. La teoria dell'integrazione fu sviluppata in tempi successivi e assicura che tale scambio è consentito se il punto (x, y, z) è esterno al corpo M.

Ma essendo

$$0 = \left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right), \tag{3.8}$$

si avrà anche

$$0 = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right), \tag{3.9}$$

che è appunto l'equazione di Laplace in tre dimensioni e questo completa, nell'intenzione dell'Autore, la dimostrazione del fatto che una funzione potenziale è soluzione di tale equazione.

Si l'on représente par ζ, la fonction $\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$; on aura

$$V = \int \zeta . \rho . dx' . dy' . dz',$$

L'intégration n'étant relative qu'aux variables x', y', z', il est clair que l'on aura

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right)=\int \rho . dx' . dy' . dz' . \left\{\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right)\right\};$$

Mais

mais on a

$$o=\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)+\left(\frac{dd\zeta}{dz^2}\right);$$

on aura donc pareillement

$$o=\left(\frac{ddV}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)+\left(\frac{ddV}{dz^2}\right); \qquad (A)$$

Figura 2. Il passo del *Traité de Mécanique céleste* in cui viene formalizzata l'equazione di Laplace (1799, II, pp. 136–137).

Nel passo illustrato in Figura 2 possiamo notare che Laplace introduce la derivazione sotto il segno di integrale in presenza della singolarità della funzione potenziale (si veda la 3.7), ricorrendo a una frase elusiva: "Essendo l'integrazione relativa solo alle variabili x', y', z', è chiaro che si avrà …" (Figura 2).

Notiamo che questa affermazione si giustifica se si interpreta l'integrale come la somma di potenziali di innumerevoli molecole e si suppone che il punto di coordinate (x, y, z) non coincida con nessuno dei centri delle molecole. Si tratta del punto della trattazione in cui, se Laplace non fosse stato interessato alla modellizzazione di quel preciso fenomeno fisico,[17] ma

[17] Come nota Gabriele Lolli, nel XVIII secolo l'attività matematica consisteva primariamente

all'elaborazione di una teoria generale della soluzione dell'equazione in (1), avrebbe potuto, anzi dovuto, fare una distinzione di casi (punto materiale interno, esterno o sulla superficie dello sferoide), rendendosi conto che l'equazione in questione è soddisfatta solo nel secondo caso. Ma il fenomeno che sta descrivendo Laplace, e che lo porta all'equazione in questione, riguarda l'attrazione gravitazionale dei corpi celesti in un sistema planetario e le ipotesi del punto materiale interno o sulla superficie non hanno alcun senso in quel contesto. Esse assumono un senso solo nel momento in cui, più avanti nella trattazione, egli usa l'equazione per altri scopi, cioè per determinare la forma della Terra (Laplace, 1799, III, pp. 25–26). In questo nuovo contesto egli assume erroneamente che il potenziale gravitazionale all'interno di uno sferoide verifichi la stessa equazione che soddisfa nel vuoto. La convinzione che l'equazione ottenuta in precedenza, nell'ambito del movimento dei centri di gravità dei corpi celesti, debba valere anche nell'ambito dell'interazione delle molecole all'interno del singolo corpo, sembra prevalere quindi in Laplace sulla necessità di una considerazione generale, di natura puramente matematica, del problema in questione.

L'equivoco che nasce qui verrà superato solo nel momento in cui si inizierà a considerare *esplicitamente* il problema di stabilire se l'equazione di Laplace può descrivere il potenziale gravitazionale in una regione di spazio non vuota.

Si tratta di uno degli errori più noti nella storia della Matematica, ma la sua importanza risiede forse, al contrario di quanto si possa ritenere a un primo impatto, nel porre un problema nuovo, piuttosto che nel non aver trovato una soluzione generale al problema matematico sottostante. Torneremo su questo fatto nel paragrafo 4.

In conclusione a questo paragrafo, vogliamo fare un cenno alla ricerca delle soluzioni dell'equazione (1) da parte di Laplace. Sia nella memoria del 1782 sull'attrazione degli sferoidi, sia nel III libro del *Traité*, Laplace scrive l'equazione (1) in coordinate sferiche, che riconduce all'equazione che oggi porta il nome di Legendre, che già all'epoca veniva studiata con metodi basati sull'uso di serie di potenze. Laplace afferma che la soluzione di questo problema ha un'espressione in serie "semplice e generale" che si esprime come somma finita ogni volta che l'equazione della superficie è "finita e razionale". La conclusione a cui arriva Laplace è che l'unico modo affinché un corpo celeste possa trovarsi in equilibrio, qualsiasi siano "le forze che lo animano", è che la sua forma sia data da un ellissoide di rotazione (Laplace, 1782, p. 342; 1799, II, pp. 138–139). Laplace è tuttavia consapevole del fatto che l'impiego dello sviluppo in serie nella sua dimostrazione comporta l'uso di

---

in una modellizzazione e risoluzione di problemi di fisica matematica. Anche se non mancano risultati isolati di natura più prettamente matematica, quella che oggi chiamiamo "matematica pura" nascerà solo nel secolo successivo, quando si inizierà a manifestare l'esigenza di liberare le dimostrazioni dalle loro "ragioni fisiche" (Lolli, 1985, pp. 26–27).

una tecnica che lui stesso considera “poco sicura” (ibid.). Questo dipende dal fatto che all’epoca il problema della convergenza delle serie impiegate dai matematici nei loro lavori non aveva ancora ottenuto una sistemazione soddisfacente; tale sistemazione si raggiunse solamente nel secolo successivo. Dunque, per dare forza alla propria soluzione e non lasciarla basare solo sul metodo dello sviluppo in serie, Laplace ricorre a una dimostrazione “a priori”:

> (...) ce résultat, fondé sur le développement en série des attractions des sphéroïdes, pouvant laisser quelques doutes, je le démontre, *a priori*, indépendamment des suite. [(…) questo risultato, fondato sullo sviluppo in serie delle attrazioni degli sferoidi, potendo lasciare alcuni dubbi, io lo dimostro *a priori*, indipendentemente da quest’ultime.] (Laplace, 1782, p. 342)

Notiamo infine, che la trattazione di Laplace del problema della forma dei pianeti ha un’impostazione molto simile a quella che segue Euler nella costruzione della sua dinamica dei fluidi. Laplace ha l’intenzione di elaborare una teoria generale relativa a sferoidi “qualsiasi”, cioè sia omogenei sia di densità variabile, e per fare ciò affronta prima il caso dello sferoide con densità omogenea [e qui troviamo l’equazione (1) che esprime lo stato di equilibrio del fluido sulla sua superficie] e poi procede con il caso più complesso della densità variabile, come aveva fatto anche Euler nel caso della dinamica dei fluidi.

4. Considerazioni sull’attribuzione della paternità dell’equazione di Laplace

Come già osservato nell’introduzione, le opere di Euler erano certamente note alla comunità dei matematici e dunque anche a Laplace e quindi egli deve essere stato a conoscenza dell’equazione a cui era pervenuto Euler nella trattazione dei fluidi incomprimibili. Il *Traité* di Laplace uscì già in occasione della sua prima pubblicazione con una tiratura molto elevata ed ebbe un’ampia diffusione anche fuori dei confini francesi. Perciò è indubbio che esso abbia contribuito alla diffusione di molte tecniche e molti concetti, tra i quali anche l’equazione oggetto della nostra trattazione. Dato che Laplace non citava quasi mai le fonti primarie e questo rendeva difficile, se non impossibile, stabilire a quali lavori propri o di altri egli avesse attinto per la stesura del testo, è naturale chiedersi se e in quale misura sia lecito associare solo il suo nome all’equazione oggetto di questo articolo o se essa non dovrebbe addirittura portare solo il nome di Euler, dato che compare per la prima volta nel suo lavoro.

Come abbiamo potuto vedere nel paragrafo 3, Laplace ottiene l’equazione a partire dalle derivate parziali della funzione potenziale V in (3.4) per derivazione dalla funzione integranda.

Notiamo che l’impiego di una funzione potenziale si può osservare in lavori precedenti di altri matematici.

Grattan-Guinness (1990, p. 332) evidenzia che anche Lagrange aveva fatto implicitamente uso di potenziali di velocità nel 1762; inoltre, come già menzionato, nella sua memoria *Sur l'équation séculaire de la Lune* del 1774, Lagrange aveva usato una funzione potenziale denominata "V" in astronomia, per il calcolo delle componenti della forza di attrazione gravitazionale, e nel 1777 aveva dedicato un breve scritto ad alcune caratteristiche delle funzioni potenziale, includendovi anche un problema del moto di un sistema di corpi, risolto attraverso l'analisi del moto del centro di massa (Archibald, 2003, p. 10).

D'altra parte, l'utilità delle funzioni potenziale era stata già mostrata da Daniel Bernoulli[18] nella sua opera *Hydrodynamica* (1738); Bernoulli aveva suggerito un metodo per la determinazione delle componenti della forza gravitazionale tramite la derivazione di una funzione potenziale e tale metodo, a cui fanno implicitamente riferimento sia Euler (1761, §67) sia Laplace (1799, II, pp. 136–137), era considerato più vantaggioso rispetto al calcolo diretto delle componenti della forza, in quanto quest'ultimo comportava la valutazione di integrali di volume per la quale era necessario conoscere sia la forma della Terra sia la sua densità (Bottazzini, 1981, p. 243).

Nonostante abbiano in comune questi punti, relativi alle funzioni potenziale, gli approcci di Euler e Laplace sono sostanzialmente diversi.

Il procedimento seguito da Euler parte dalla modellizzazione di un fenomeno reale nello studio dei fluidi e si basa su due punti fondamentali:

- il vettore velocità risulta essere il gradiente di una funzione potenziale S;
- per il principio di conservazione della massa, la divergenza di questo campo vettoriale è nulla.

Dalle precedenti due affermazioni segue immediatamente il fatto che

$$div(\nabla S) = \Delta S = 0, \tag{4.1}$$

che è il punto di arrivo del ragionamento di Euler. È importante sottolineare il fatto che Euler non sviluppa una metodologia generale per la costruzione di soluzioni dell'equazione

$$\Delta S = 0, \tag{4.2}$$

ma si limita ad esibire alcuni esempi polinomiali di questo tipo.

L'approccio di Laplace è invece di natura diversa: egli intende dimostrare che la funzione del potenziale gravitazionale soddisfa l'equazione che lui ha già in mente e che chiama "equazione notevole" (Laplace, 1799, II, p. 137). Anche Laplace parte dalla modellizzazione di un fenomeno fisico ma, a differenza di Euler, egli cerca dei potenziali gravitazionali che prevede debbano soddisfare l'equazione (1). Infatti, egli osserva sostanzialmente che il potenziale gravitazionale

[18] Daniel Bernoulli (1700, Groninga, Paesi Bassi – 1782, Basilea).

$$V(x, y, z) = \int_M \frac{g m_1 m_2}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} dx'dy'dz' \tag{4.3}$$

verifica l'equazione

$$\Delta V(x, y, z) = \int_M \Delta \frac{g m_1 m_2}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} dx'dy'dz' \; per \; ogni \; (x, y, z) \notin M, \tag{4.4}$$

giungendo alla conclusione che il potenziale gravitazionale costruito inizialmente deve soddisfare l'equazione (1). Quella di Laplace sembra quindi, almeno nell'intento, una dimostrazione del fatto che il potenziale gravitazionale soddisfa necessariamente quella equazione notevole.[19]

Dopo aver caratterizzato i due approcci e averli messi a confronto, vediamo quali sono state le ricadute più immediate dei rispettivi lavori di Euler e Laplace che hanno visto coinvolta l'equazione oggetto della trattazione.

Successivamente al lavoro sul moto dei fluidi di Euler, il suo metodo, che porta a cercare una funzione S che verifica la condizione $div(\nabla S) = \Delta S = 0$, è stato applicato allo studio di innumerevoli fenomeni fisici, compreso il modello di Fourier della propagazione del calore. Si tratta di una generalizzazione del metodo, nella quale non è una particolare equazione a essere centrale, ma appunto il procedimento mediante il quale si modellizzano fenomeni fisici tramite argomentazioni che conducono ad equazioni specifiche.

Un altro aspetto che va chiarito quando si cerca di delineare la ricaduta del lavoro di Euler sullo sviluppo successivo della matematica relativa all'equazione oggetto della nostra trattazione, è quello che riguarda il calcolo delle variazioni; esso potrebbe infatti sembrare una conseguenza del lavoro di Euler sulla dinamica dei fluidi. Osserviamo infatti che l'equazione di Euler-Lagrange che si incontra quando si vuole cercare il minimo del funzionale

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u(x, y, z)^2) dxdydz \tag{4.5}$$

è $\Delta u = 0$.

Come affermano Cannell e Lord (1993), questo problema, che prenderà successivamente il nome di "principio di Dirichlet", fu formulato per la prima volta da Green, nel suo *Essay* del 1828. Si tratta di un problema molto importante nell'evoluzione epistemologica della Matematica (Bottazzini,

[19] Il concetto di dimostrazione non è applicabile, a nostro avviso, al procedimento seguito da Laplace per due motivi, uno di natura metodologica, l'altro di natura concettuale. In primo luogo, Laplace non disponeva degli strumenti teorici e metodologici adeguati a formalizzare una dimostrazione secondo i canoni dell'Analisi matematica moderna, ma soprattutto l'inferenza che egli compie non è di natura deduttiva, dal punto di vista logico, in quanto in essa ci sono premesse matematiche non esplicitate, come per esempio relative al dominio della funzione, concetto quest'ultimo, che sarà definito solo successivamente, nel corso del XIX secolo.

1981, pp. 242–249; Lolli, 1985, pp. 24–41), tuttavia non ci sembra possibile affermare che la sua formulazione abbia legami diretti con il lavoro di Euler sul moto dei fluidi.

Vediamo ora quali sono le ricadute più immediate del lavoro di Laplace. Nel lavoro che coinvolge l'equazione in questione, Laplace inizia la ricerca delle funzioni armoniche.[20] La ricaduta della teoria matematica che si sviluppò a partire da questo, la teoria del potenziale, ebbe ripercussioni importantissime nel campo delle applicazioni, a partire dai lavori successivi sull'elettricità, in quanto il potenziale elettrico ha la stessa forma del potenziale gravitazionale. Infatti, è proprio da questo punto che prenderà avvio il lavoro di George Green, come egli espressamente afferma, che lo condurrà, attraverso l'analisi matematica dell'elettricità e del magnetismo (Green, 1828, p. vii), a sviluppare, indipendentemente da Gauss,[21] la teoria del potenziale.

Una conseguenza importante del lavoro di Laplace è la ricaduta che esso ha avuto sulla progettazione e sulla costruzione degli apparati elettrici. Infatti, la proprietà di essere inversamente proporzionali al quadrato della distanza, che la forza elettrica e la forza gravitazionale hanno in comune, ha permesso l'applicazione della teoria sviluppata da Laplace per lo studio del moto dei corpi celesti allo studio dei corpi elettricamente carichi. Questo fatto ha permesso di progettare e realizzare dispositivi elettrici e ha avuto la conseguenza di un rapidissimo sviluppo della tecnologia relativa. D'altra parte, la teoria del potenziale ha ricevuto un forte impulso da questo tipo di applicazioni.

Da quanto esposto ci sembra di poter affermare che l'uso che fa Laplace dell'equazione in questione sia di natura molto diversa rispetto a quello che ne fa Euler e che Laplace sia stato il primo ad aver intuito ciò che fu successivamente dimostrato esplicitamente da Gauss, cioè che questa equazione gioca un ruolo centrale nella modellizzazione dei fenomeni in cui sono coinvolte forze attrattive e repulsive che agiscono in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza.[22] Laplace applica infatti l'equazione in un campo diverso da quello in cui essa è comparsa per la prima volta, fatto che può essere considerato la prima generalizzazione della

---

[20] Una funzione armonica è una funzione V differenziabile fino al secondo ordine che verifica l'equazione $\Delta V = 0$.

[21] Carl Friedrich Gauss (1777, Braunschweig – 1855, Gottinga).

[22] Ricordiamo che l'opera di Gauss del 1840, in cui egli riassume le sue ricerche sulla teoria del potenziale, ha proprio il titolo *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte",* cioè *"Leggi generali in riferimento alle forze attrattive e repulsive che agiscono in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza"*. Si tratta dunque di un'impostazione che generalizza la questione a tutte le forze di questo tipo poiché, come afferma Gauss, in Natura sono molti i fenomeni che possono essere spiegati assumendo l'azione di una forza agente in rapporto inversamente proporzionale al quadrato della distanza, come per esempio la gravità, il magnetismo o l'elettricità (Gauss, 1840, p. 1).

sua validità in ambiti diversi, modellizzabili con la stessa legge matematica. Con questo egli pone, a nostro avviso, le basi per la teoria del potenziale.

5. La “svista” di Laplace

Abbiamo già accennato nel paragrafo 3 a ciò a cui gli storici si riferiscono con il termine di “opinione”, contrastata da quanto poi mostrato da Poisson (Bottazzini, 1981, p. 244) o *oversight*, cioè “svista” (Gratain-Guinnes, 1990, p. 332), a cui pare sia stato soggetto Laplace, nel momento in cui stava considerando le funzioni armoniche non solo per punti materiali esterni allo sferoide, ma anche per punti collocati al suo interno, supponendo che anche in questo caso dovesse valere la condizione $\Delta V = 0$ (Laplace, 1799, III, pp. 25–26). Tuttavia, non possiamo esimerci a questo punto dal fare un cenno alla successiva correzione di tale errore, soprattutto perché a un esame superficiale questo problema potrebbe sminuire l’importanza del contributo di Laplace nello sviluppo della successiva teoria del potenziale. Come già accennato in precedenza, è invece proprio questo errore, a nostro avviso, a suggerire l’idea di una soluzione generale del problema, valida per punti collocati all’interno, all’esterno o sulla superficie stessa del corpo. Sarà Poisson,[23] allievo di Laplace, a correggere l’errore del maestro, mentre quest’ultimo era ancora in vita. Alcuni storici (Rouse Ball, 1908, p. 427; Archibald, 2003, p. 11) sostengono che Laplace, essendo molto generoso nei confronti dei propri allievi, nonostante fosse consapevole del problema, avesse lasciato a Poisson l’opportunità di correggerlo, cosa che in effetti Poisson fece nel 1813 (Poisson, 1813).[24] Sia Green sia Gauss riprenderanno successivamente nelle proprie ricerche sulla teoria del potenziale il lavoro di Poisson, nel quale si mostra che l’equazione di Laplace è un caso particolare dell’equazione, oggi detta di Poisson, $\Delta V = f$.

Per quanto esposto in precedenza, riteniamo di poter affermare che la prima pietra nello sviluppo di una teoria del potenziale sia stata posta proprio da Laplace. Una disquisizione dettagliata sul ruolo dell’equazione di Laplace nell’evoluzione della teoria del potenziale sarebbe un argomento interessante, ma riteniamo che essa richiederebbe una trattazione a parte, che va decisamente oltre il limite che ci siamo posti per il presente lavoro.

---

[23] Siméon-Denis Poisson (1781, Pithiviers – 1840, Parigi).

[24] Notiamo in effetti che nel trattato sulla storia della teoria del potenziale di Bacharach (1883, p. 7), l’equazione che oggi porta il nome di Poisson ($\Delta V = -4\pi\rho$) è chiamata “equazione alle derivate parziali di Laplace-Poisson”, il che fa notare che all’epoca l’importanza del contributo di Laplace anche in riferimento di tale equazione più generale, era maggiormente riconosciuto.

6. Conclusioni

In conclusione, possiamo affermare che Euler fu il primo a scrivere l'equazione che oggi porta il nome di Laplace nella forma

$$div(\nabla S) = \Delta S = 0, \tag{6}$$

in un lavoro sulla modellizzazione dei fluidi in moto, che presenta un metodo successivamente generalizzato ad altri fenomeni fisici. Laplace, che conosceva il lavoro di Euler e aveva studiato e ben compreso la sua portata innovatrice nonché il ruolo centrale dell'equazione da lui ottenuta, intuì che il potenziale gravitazionale avrebbe dovuto verificare l'equazione in (1) e mostrò che (nel vuoto) questa congettura era corretta, iniziando poi una ricerca sistematica delle soluzioni.

È possibile inoltre affermare che l'errore che commise Laplace nel considerare anche il potenziale all'interno di un corpo come soggetto all'equazione (1) si è rivelato in realtà un passaggio significativo verso lo sviluppo degli aspetti matematici che avrebbero portato alla versione non omogenea dell'equazione (1), cioè $\Delta u = f$. Con Laplace iniziò dunque la teoria del potenziale, che comprende tutti gli strumenti teorici per la risoluzione dei problemi relativi all'equazione $\Delta u = f$ (potenziali newtoniani, nuclei di Poisson, funzioni di Green, formule di media, capacità) e alle sue applicazioni ai conduttori elettrici e ai condensatori.

In conclusione, l'importanza del lavoro di Laplace riguardo all'equazione in questione è stata fondamentale ma non possiamo dimenticare che Euler fu il primo a scriverla e a fornire molti elementi utili per il successivo lavoro di Laplace. Riteniamo perciò che, nonostante dal punto di vista meramente storico-cronologico la paternità dell'equazione sia da attribuire a Euler, sia per il modo mirato con cui Laplace la usa, sia per le ricadute che il suo lavoro con essa ha avuto sugli sviluppi della teoria del potenziale e sulle applicazioni alla teoria dell'elettromagnetismo, dal punto di vista epistemologico sia corretto sottolineare il contributo di Laplace nell'attribuzione di un nome all'equazione. Crediamo pertanto che essa dovrebbe portare il nome di entrambi, cioè chiamarsi "equazione di Euler-Laplace".

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano i referee le cui profonde e pertinenti osservazioni hanno contribuito a migliorare la versione iniziale dell'articolo.

Riferimenti bibliografici

Archibald, T. (2003). L'Ottocento: matematica. Equazioni differenziali alle derivate parziali. *Enciclopedia Treccani: Storia della Scienza*. Disponibile da www.treccani.it

Bacharach, M. (1883). *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*. Göttingen: Vandenkoeck & Ruprecht.

Bernoulli, D. (1738). *Hydrodynamica*. Basilea: Joh. Henr. Deckeri. Disponibile da https://archive.org/details/bub_gb_VP5xrx373N4C

Bottazzini, U. (1981). *Il calcolo sublime: Storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Torino: Boringhieri.

Boyer, C. B. (1959). *The rainbow: From myth to mathematics*. New York: Yoseloff.

Cannell, D. M., & Lord, N. J. (1993). George Green, mathematician and physicist 1793–1841. *The Mathematical Gazette, 77*(478), 26–51. doi:10.2307/3619259

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2018). *La matematica e la sua storia: Dagli ultimi bagliori della Grecia antica alla fine del Medioevo*. Bari: Dedalo.

Euler, L. (1757a). *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides.* The Euler archive, E225. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E225.html (Lavoro originale pubblicato in *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 11, 1757, pp. 217–273).

Euler, L. (1757b). *Principes généraux du mouvement des fluides*. The Euler Archive, E226. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E226.html (Lavoro originale pubblicato in *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 11*, 1757, pp. 274–315).

Euler, L. (1761). *Principia motus fluidorum.* The Euler Archive, E258. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E258.html (Lavoro originale pubblicato in *Novi Commentarii accademiae scientiarum Petropolitanae 6*, 1761, pp. 271–311).

Euler, L. (1770). *Sectio secunda de principiis motus fluidorum.* The Euler Archive, E396. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E396.html (Originariamente pubblicato in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 14*, 1770, pp. 270–386).

Euler, L. (1771). *Sectio tertia de motu fluidorum.* The Euler Archive, E409. Disponibile da http://eulerarchive.maa.org/pages/E409.html (Originariamente pubblicato in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15*, 1771, pp. 219–360).

Gauss, K. F. (1840). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte*. Leipzig: Weidmann. Disponibile da http://www.deutschestextarchiv.de/book/view/gauss_lehrsaetze_1840?p=26

Grattan-Guinness, I. (1990). *Convolutions in French mathematics, 1800–1840* (Voll. 1–3). Basel: Birkhäuser.

Green, G. (1828). *An essay on the mathematical analysis of electricity and magnetism*. Nottingham: T. Wheelhouse. [Ristampato in tre parti in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (1850), *39*(1), 75–89; (1852), *44*(4), 356–374; (1854), *47*(3), 161–211].

Laplace, P. S. (1782). Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. *Ouvre complètes de Laplace* (Vol. 10, pp. 341–419). Paris: Gauthier-Villars. Disponibile da http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k775981/f350

Laplace, P. S. (1787). *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturn*. *Oeuvre complètes de Laplace* (Vol. 10, pp. 275–292). Paris: Gauthier-Villars. Disponibile da http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77599c/f280

Laplace, P. S. (1799). *Traité de mécanique céleste* (Voll.1–2). Paris: Duprat.

Lolli, G. (1985). *Le ragioni fisiche delle dimostrazioni matematiche*. Bologna: il Mulino.

Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia matematica*. London: Benjamin Motte.

Poisson, S. D. (1813). Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 3*, 388–392.

Rouse Ball, W. W. (1908). *A short account of the history of mathematics*. New York: Dover.

Todhunter, I. (1962). *A history of mathematical theories of attraction and figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace* (Voll. 1–2). New York: Dover. (Lavoro originale pubblicato nel 1873).

Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria

Miglena Asenova
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
NRD, Università di Bologna

Abstract. *The article presents a survey on the potential that the couple: "straightedge and compass construction - respective proof" has in primary school as regards the education to non-iconic perception in geometry, which is necessary for the correct nominalization and definition of the geometrical plane figures.*

Keywords: non-iconic perception, straightedge and compass construction, semiotic registers, proof, primary school.

Sunto. *L'articolo presenta un'indagine sulle potenzialità che la coppia: "costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione" ha nella scuola primaria per quanto concerne la formazione alla percezione non iconica in geometria, necessaria alla corretta nominalizzazione e definizione delle figure geometriche del piano.*

Parole chiave: modo di vedere non iconico, riga e compasso, registri semiotici, dimostrazione, scuola primaria.

Resumen. *El artículo presenta una encuesta sobre los potenciales que la pareja: "construcción con regla y compás - demostración relativa" tiene en la escuela primaria en relación a la formación de la percepción no icónica en geometría, necesaria para la correcta nominalización y definición de las figuras geométricas del plano.*

Palabras clave: forma no icónica de ver, regla y compás, registros semióticos, demostración, escuela primaria.

1. Introduzione

L'apprendimento in geometria si presenta come una delle principali problematiche in didattica della matematica soprattutto nei livelli scolastici della scuola secondaria (Duval, 2005; Fujita, Jones, & Miyazaki, 2011). Le cause delle difficoltà degli studenti in questo ambito sono state e continuano a essere studiate da molti ricercatori e i numerosi quadri concettuali e indirizzi di ricerca a livello internazionale mettono in evidenza, confermandola da più punti di vista, la complessità della problematica (Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, & Owens, 2017).

Le teorie specifiche dell'apprendimento in geometria sono legate principalmente a quattro impostazioni di base, di cui principalmente le ultime tre si configurano attualmente in uso in didattica della matematica:

- l'ipotesi intra-inter-trans figurale di Piaget e Garcia, il cui punto di vista, anche se oramai datato, è stato importante nello studio dell'apprendimento della geometria (Aglì, D'Amore, Martini, & Sandri, 1997);
- il modello dei coniugi van Hiele (1986), che offre una visione strutturale dell'apprendimento in geometria, secondo il quale l'apprendente passa da un livello a quello successivo, caratterizzato da un maggiore grado di astrazione, attraverso l'accumulo di esperienza e una formazione appropriata;
- la teoria dei concetti figurali (Fischbein, 1993; Mariotti & Fischbein, 1997), secondo la quale l'oggetto geometrico ha due componenti, una figurale e una concettuale; il ragionamento geometrico consiste in un'interazione tra questi due aspetti e le difficoltà e gli errori sono da intendersi in termini di disarmonia e conflitto tra le due componenti;
- l'approccio cognitivo di Duval (1998, 2005, 2017), secondo il quale lo studente apprende solo se è in grado di coordinare tra loro il registro figurale e il registro discorsivo, ma tale coordinamento richiede che il soggetto adotti un particolare modo di "vedere", che consente di effettuare una decostruzione dimensionale della figura geometrica, che Duval chiama "modo di vedere non iconico".

Nell'ultimo decennio sono state numerose le applicazioni di approcci e teorie, non necessariamente nate in ambito geometrico, all'apprendimento della geometria, soprattutto sotto la spinta ricevuta dall'ingresso nella scuola degli ambienti di geometria dinamica (AGD). (Per un approfondimento degli aspetti legati agli AGD, rinviamo a: Sinclair et al., 2017).

In seguito, diamo solo una breve panoramica delle principali direzioni di ricerca, che naturalmente non sono quasi mai a intersezione vuota.

Una parte delle ricerche nell'ambito dell'apprendimento della geometria riguarda più prettamente gli aspetti legati allo studio della natura della visualizzazione (Duval, 2005; Healy & Powell, 2013; Owens, 2015; Rivera, 2011) ma anche la maniera particolare con cui gli AGD possono aiutare a sviluppare la capacità di visualizzare e di trasformare mentalmente le immagini visualizzate (Presmeg, 2006).

Altre ricerche studiano invece quello che Mariotti (2015) chiama "invarianza della relazione tra gli invarianti" (p. 15), che possono essere invarianti di costruzione o derivati (Arzarello et al., 2002; Baccaglini Frank & Mariotti, 2010) e che costituiscono un aspetto importante nell'apprendimento delle definizioni (Mariotti & Fischbein, 1997) e nella classificazione degli oggetti geometrici.

Un altro indirizzo di ricerca riguarda le potenzialità delle costruzioni in AGD nell'esplorazione di proprietà e nella costruzione e nella verifica di congetture nonché nell'avvio alla dimostrazione (Leung, 2008; Leung, Baccaglini Frank, & Mariotti, 2013).

Altri studi ancora si spingono in direzione dell'indagine del ruolo, nell'apprendimento della geometria, dell'*embodiment*, dei gesti, del movimento in generale e dei diagrammi, anche in una prospettiva che rileva la necessità di una mediazione semiotica nell'uso degli artefatti, visti come strumenti che incorporano un sapere matematico nascosto, al quale lo studente non accede direttamente, ma tramite una mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Bartolini Bussi & Baccaglini Frank, 2015).

Tornando alle impostazioni teoriche di base nell'apprendimento della geometria, possiamo dire che ciò che accomuna molte delle ricerche appena elencate è il fatto che in esse le cause del fallimento degli studenti vengono attribuite a difficoltà di gestione da parte del soggetto apprendente delle proprietà prettamente matematiche e concettuali degli oggetti geometrici, ascrivendo tali difficoltà a un mancato adattamento del soggetto alle esigenze di armonizzazione tra le componenti figurale e concettuale e/o ad aspetti di natura strutturale, propri del sapere matematico in sé, che impediscono al soggetto in difficoltà di accedere al livello di astrazione adeguato per lo svolgimento di un dato compito (van Hiele, 1986). Tuttavia, anche le ricerche molto recenti nelle direzioni classiche del problema, non hanno del tutto fatto luce su alcuni aspetti fondamentali: per esempio, nel primo caso, continua a non essere ben chiaro *come* avviene l'adattamento *nel* soggetto che apprende, cioè quali siano le azioni concrete, cognitivamente significative, che egli deve compiere per armonizzare l'interazione delle componenti figurale e concettuale; mentre, nel secondo caso, non è ben chiaro in che cosa consista, sempre da un punto di vista cognitivo, il cambio di prospettiva necessario per passare da un livello a quello successivo. Ciò che distingue invece l'approccio all'apprendimento della geometria di Duval (1998, 2005, 2017) è il fatto che questo Autore indaga la problematica proprio da un punto di vista cognitivo, individuando cioè quello che potrebbe essere chiamato "l'armamentario di base" di cui lo studente deve disporre per poter affrontare con efficienza un compito in geometria. Potremmo dire che Duval studia, in generale, attraverso la teoria dei registri semiotici (Duval, 1993, 2017), gli invarianti cognitivi dell'apprendimento in matematica e, in particolare, quelle che, in una prospettiva ermeneutica in didattica della matematica (Bagni, 2009), potremmo chiamare le "condizioni di accesso" al circolo ermeneutico (Gadamer, 1960). Tali condizioni di accesso consentono di trasformare il circolo in una spirale (Jung, 2002, cit. in Bagni, 2009, p. 45), nel momento in cui lo studente si confronta con una rappresentazione (figura geometrica, testo di una definizione o di una dimostrazione, equazione etc.) che per sua natura, necessita di una interpretazione.

Concludendo, possiamo dire che, nonostante il campo delle ricerche nell'ambito dell'apprendimento geometrico sia molto ricco ed esteso, rimane a nostro avviso ancora molto da indagare in riferimento ai suoi aspetti strettamente cognitivi. Infatti, riteniamo che le diverse impostazioni teoriche di base messe in evidenza all'inizio del paragrafo non siano tra loro alternative, ma siano in un certo modo complementari e contribuiscano ad inquadrare il problema dell'apprendimento della geometria da prospettive diverse, tutte necessarie per avere una visione più completa possibile del problema ma una di esse, quella duvaliana, è da considerarsi propedeutica alle altre. Un approfondimento in questa direzione consentirebbe di gettare luce sulle cause più nascoste dei fallimenti o delle difficoltà degli studenti. La presente ricerca nasce dall'intenzione di fornire un esempio di indagine di questo tipo.

2. Quadro teorico di riferimento

Il quadro teorico di riferimento di questo lavoro di ricerca si basa su due componenti molto diverse tra loro dal punto di vista concettuale ma che contribuiscono alla sua unità progettuale. Per l'analisi degli aspetti cognitivi della problematica, per la conseguente formulazione delle domande di ricerca e per l'analisi delle relazioni tra le variabili d'azione abbiamo fatto riferimento all'approccio cognitivo all'apprendimento della geometria di Duval (1998, 2005, 2017), mentre per la realizzazione degli strumenti di rilevazione e dell'elaborazione dei dati riferiti a una delle domande di ricerca abbiamo fatto riferimento alla formula di comprensione di un testo matematico di D'Amore e Fandiño Pinilla (2015). Di seguito caratterizziamo brevemente e separatamente queste due componenti del quadro teorico di ricerca.

2.1. L'approccio cognitivo all'apprendimento in geometria secondo Raymond Duval

I lavori di Raymond Duval degli anni '90 (soprattutto Duval, 1993), riferiti alla particolare caratterizzazione epistemologica della matematica come un dominio di conoscenza in cui il ricorso alle rappresentazioni semiotiche è necessario per via dell'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, hanno determinato una svolta epocale nella ricerca in didattica della matematica. Il termine "paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38) venne da allora in poi usato per descrivere il fenomeno paradossale secondo il quale chi apprende la matematica non può, proprio a causa dell'inaccessibilità diretta dei suoi oggetti, fare a meno di confondere l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. L'attività matematica si svolge, secondo Duval, effettuando delle trasformazioni semiotiche all'interno dello stesso registro semiotico (i *trattamenti*) o passando da un registro semiotico a un altro (le *conversioni*). La comprensione e la capacità di produrre pensiero matematico nonché la competenza nella risoluzione di problemi è legata, secondo l'Autore, alla capacità di coordinare efficacemente registri semiotici differenti; si ha apprendimento solo se l'apprendente è in grado di effettuare una tale coordinazione (D'Amore, 2015; Duval, 2017). In riferimento all'apprendimento della geometria, all'aspetto generale, relativo ai registri semiotici, si aggiunge un altro aspetto particolare, legato alla visualizzazione. Una caratteristica dell'approccio cognitivo all'apprendimento della geometria (Duval, 1998, 2005, 2017) è legato al fatto che esso non prevede una declinazione delle capacità di visualizzazione sulla base all'età, come invece sembra caratteristico e tipico nei lavori di molti altri autori, non solo precedenti. Secondo questa prospettiva è il compito che il soggetto deve svolgere a imporre la necessità di interpretare gli oggetti geometrici in un modo determinato o in un altro; Duval distingue in questo senso come necessari un modo di vedere iconico e un modo di vedere non iconico.

Il modo di vedere iconico è legato alla percezione delle caratteristiche riferite alla forma, al contorno, agli aspetti per così dire topologici e metrici dell'oggetto geometrico (Figura 1) mentre il modo di vedere non iconico è legato a una decostruzione dimensionale della figura, che fa emergere le sue proprietà geometriche; essa è necessaria per lo svolgimento della maggior parte dei compiti in geometria (Figura 2).

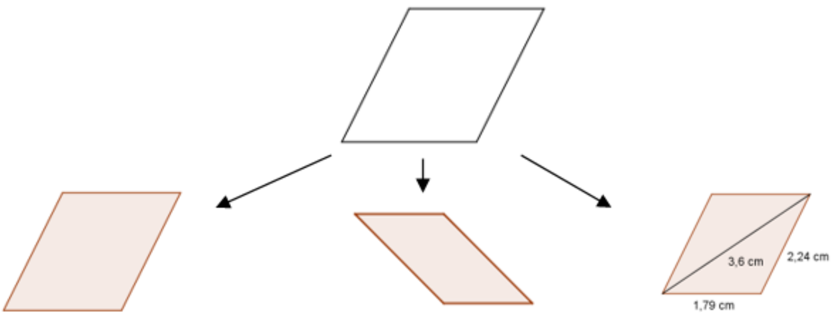


Figura 1. Modo di vedere iconico: sono gli aspetti topologici e metrici a essere messi in rilievo.

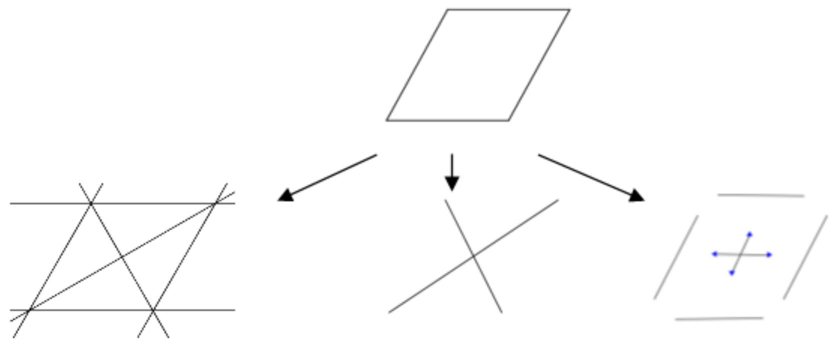


Figura 2. Modo di vedere non iconico: la figura geometrica viene decostruita dal punto di vista dimensionale; i vertici sono punti (enti 0-dimensionali) che si ottengono come intersezioni di rette (enti 1-dimensionali); le diagonali sono segmenti (enti 1-dimensionali) e il loro punto d'intersezione (ente 0-dimensionale) è il loro punto medio; i lati sono segmenti (enti 1-dimensionali) appartenenti a rette (enti 1-dimensionali), che sono a due a due parallele.

Duval (2005) caratterizza quattro modi di riconoscere le figure geometriche, i primi due tipici del modo di vedere iconico, gli ultimi due del modo di vedere non iconico: (1) *il modo di vedere del botanico*: il tipo di operazione richiesta al soggetto consiste nel riconoscere forme a partire dalle qualità visuali di un contorno; (2) *il modo di vedere del geometra*: il tipo di operazione che il soggetto deve compiere consiste nel misurare e sfruttare le misure rilevate e le conoscenze teoriche relative a esse per poter determinare delle grandezze; (3) *il modo di vedere del costruttore*: richiede che il soggetto sia in grado di decomporre una forma in tracciati costruibili mediante uno strumento (eventualmente passando attraverso tracciati ausiliari che non appartengono alla figura finale); (4) *il modo di vedere dell'inventore-artigiano*: richiede che lo studente riesca a trasformare una figura di partenza in un'altra, in modo da far emergere proprietà geometriche rilevanti per il compito assegnato.

Le immagini in figura (Figure 3.1–3.4) mostrano alcuni esempi che fanno comprendere meglio le caratteristiche dei quattro modi di vedere appena descritti.

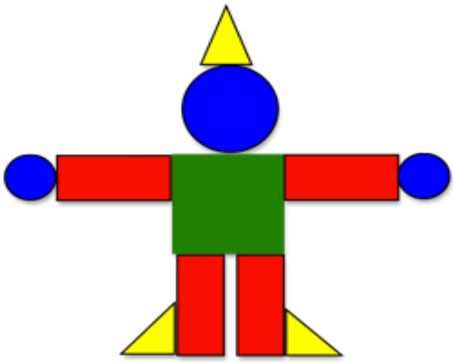


Figura 3.1. Modo di vedere del botanico: il soggetto distingue le forme in base alla loro forma, al loro contorno.

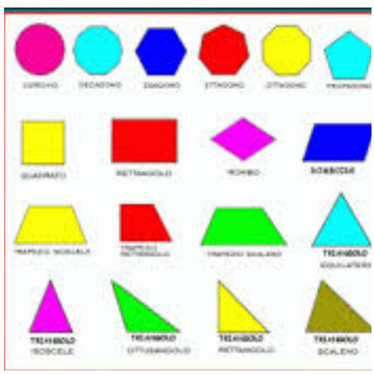


Figura 3.2. Modo di vedere del geometra: il soggetto distingue alcune invarianti che gli consentono di classificare le figure in sottoclassi e di decidere quali misure rilevare.

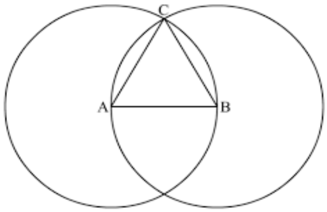


Figura 3.3. Modo di vedere del costruttore: al fine di costruire il triangolo equilatero, il soggetto deve sfruttare le proprietà della circonferenza.

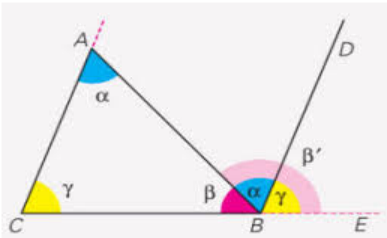


Figura 3.4. Modo di vedere dell'inventore-artigiano: al fine di dimostrare il teorema che afferma che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo ABC è 180°, è necessario aggiungere dei tracciati ausiliari al triangolo ABC, prolungare cioè il lato CB e tracciare la parallela ad AC passante per B.

L'analisi effettuata da Duval non si ferma però ai primi due livelli di distinzione tra i modi di vedere in geometria (iconico - non iconico da una parte; del botanico, del geometra, del costruttore e dell'inventore-artigiano dall'altra); l'Autore propone infatti un'analisi ancora più articolata, individuando il tipo di operazione che il soggetto deve compiere sulle forme visive a seconda che egli adotti uno dei quattro modi di vedere (Tabella 1) e chiarendo in quale modo si mobilitano le proprietà geometriche rispetto al tipo di operazione che deve essere compiuta (Tabella 2).

Da quanto appena esposto, sembrerebbe ovvio cogliere delle analogie tra la classificazione dei modi di vedere in geometria e i modi di concepire la geometria nei vari livelli scolastici. Tuttavia si deve tenere presente che la classificazione duvaliana non è legata a una maturazione genetica dell'individuo [come avverrebbe in una prospettiva di stampo piagettiano (Piaget, Inhelder, & Szeminsca, 1948)] né a una necessità di maturazione cognitiva dell'individuo per l'accesso a diversi livelli di astrazione (come avverrebbe in una prospettiva alla van Hiele) e nemmeno essa pone l'accento sulle proprietà dei concetti figurali (come avverrebbe in una prospettiva alla Fischbein-Mariotti). Infatti, il modo di vedere non iconico è acquisibile anche da parte di allievi di giovane età in quanto non richiede particolari competenze matematiche; esso è, al contrario, secondo Duval, un passaggio obbligato per accedere a tali conoscenze.

Tabella 1
I quattro modi di vedere dal punto di vista delle operazioni da compiere sulle forme visive (Duval, 2005)

Modo di "vedere"	Botanico	Geometra	Costruttore	Inventore-artigiano
Tipo di operazione richiesta per l'attività proposta sulle forme visive.	Conoscere forme a partire da qualità visuali di un contorno (privilegia una forma particolare come tipica).	Misurare i bordi di una superficie (perimetro) sul terreno o su un disegno (variazione in scala, quindi procedimento di misura).	Decomporre una forma in tracciati costruibili mediante uno strumento (passare per tracciati ausiliari che non appartengono alla figura finale).	Trasformare una figura in un'altra (aggiungere tracciati organizzativi nella figura finale per rendere possibile tale trasformazione).

Tabella 2
I quattro modi di vedere dal punto di vista della mobilitazione delle proprietà geometriche (Duval, 2005)

Modo di "vedere"	Botanico	Geometra	Costruttore	Inventore-artigiano
Come si mobilitano le proprietà geometriche rispetto al tipo di operazione.	Non ci sono relazioni tra le differenti proprietà (non è possibile dare una definizione matematica).	Le proprietà sono criteri di scelta per le misure da prendere (sono utili solo se rimandano a una formula che permette di eseguire dei calcoli).	Le proprietà geometriche si mobilitano come restrizioni di ordine di costruzione (certe proprietà si ottengono mediante una sola operazione, altre richiedono più operazioni).	Le proprietà si mobilitano implicitamente mediante una rete più completa di quanto non lo sia la figura di partenza (rette per la geometria piana o intersezioni di piani per la geometria solida …).

Il lavoro qui proposto, pur collocandosi dal punto di vista sperimentale nell'ambito dalla scuola primaria, si pone in effetti in una prospettiva aperta allo sviluppo di un curricolo in continuità tra i diversi livelli scolastici, proprio perché mette in luce come le possibili cause delle difficoltà degli studenti dei livelli scolastici superiori possano essere ricercate nel modo di vedere *la* geometria e di vedere *in* geometria ai livelli scolastici inferiori. È necessario infatti tenere presente che i diversi modi di vedere possono coesistere e che il ricorso all'uno piuttosto che all'altro possa dipendere dal contesto e che mentre alcuni modi di vedere (soprattutto quello del botanico) sorgono spontaneamente, anche sulla base dell'esperienza, altri richiedono una didattica specifica per essere appresi.

2.2. La formula di comprensione di un testo matematico secondo D'Amore e Fandiño Pinilla

Nelle attività in geometria che richiedono di adottare un modo di vedere non iconico, la comprensione del contenuto matematico avviene a partire da una sinergia tra visualizzazione e linguaggio (Duval, 2007, p. 3), anche se dal punto di vista semio-cognitivo vi sono delle distinzioni da fare sul ruolo che ciascuna di queste due componenti svolge all'interno del processo di apprendimento e sulle quali entreremo in dettaglio nel capitolo 3. La componente del linguaggio si condensa in una produzione discorsiva di enunciati messi in relazione l'uno con l'altro per giustificare, per spiegare o per dimostrare fatti emergenti da una costruzione geometrica. Infatti, il caso ideale in cui è possibile affermare che lo studente ha costruito conoscenza, è quello in cui egli è in grado di accompagnare la costruzione geometrica dalla sua giustificazione concettuale, cioè dalla dimostrazione del fatto che la figura costruita è proprio quella richiesta oppure del fatto che la costruzione eseguita risolve il problema posto. Una stesura autonoma, intenzionale, di una tale produzione discorsiva è una competenza elevata anche per studenti di scuola secondaria superiore. A nostro avviso, la comprensione del discorso matematico implicato può tuttavia essere verificato anche indebolendo le ipotesi sul grado di intenzionalità richiesto; infatti, per poter affermare che la comprensione è avvenuta, è sufficiente che lo studente sia in grado di comprendere il contenuto della produzione discorsiva che accompagna la costruzione geometrica; non è necessario che tale produzione discorsiva sia stata prodotta da lui, autonomamente. Da queste considerazioni è nata l'esigenza di individuare un modo il più possibile oggettivo di verifica della comprensione di una produzione discorsiva che si presenta come giustificazione, descrizione o dimostrazione di una costruzione geometrica.

L'idea che sia possibile rendere misurabile il grado di comprensione di un testo ha una lunga tradizione, così come l'idea che il grado di correttezza del completamento di un testo *cloze* (cioè un testo in cui è stato cancellato un certo numero di parole seguendo un algoritmo prestabilito) possa fornire informazioni sulla misura della comprensione del testo da parte di un soggetto. Come evidenziano D'Amore e Fandiño Pinilla (2015), le ricerche in questo campo sono tante e molte di esse sono specifiche della matematica (citiamo a titolo esemplificativo Gagatsis, 1980, 1982, 1984, 1985, 1995; Gagatsis & Chaney, 1983; Kene, Byrne, & Hater, 1974).

Secondo D'Amore e Fandiño Pinilla (2015) si può affermare che "lo studente capisce un brano di un testo di matematica (…) se è in grado di 'chiudere' il brano che presenta cancellazioni, cioè scegliere con un certo qual successo le parole che sono state cancellate nel brano" (p. 31).

Come sottolineano gli Autori, la difficoltà maggiore consiste nel quantificare in maniera opportuna la comprensione, renderla cioè misurabile, oggettivarla. La formula matematica di comprensione costruita da loro è il frutto di un continuo meticoloso lavoro di confronto tra l'elaborazione teorica, lo studio analitico e critico di precedenti formule e i numerosi risultati euristici raccolti sul campo.

Riportiamo qui di seguito l'interpretazione della formula di comprensione.

> Sia dato un brano T che comprende n parole. Non si considerano formule né segni di punteggiatura.
> Il numero delle parole cancellate è Int(n/5) cioè la parte intera del numero razionale n/5.
> Delle parole cancellate fanno parte le seguenti categorie:
> c1) parole di lingua corrente non di carattere logico né tecnico (numero a);
> c2) parole tecniche della matematica (numero b);
> c3) parole di lingua a carattere logico (connettivi: non, e, o, implica, …; quantificatori: nessuno, alcuni, tutti, …; deduttivo: siccome, poiché, dimostra, …) (numero c).
> Dunque: $a + b + c = \mathrm{Int}(n/5)$.
> Notiamo che n, Int(n/5), a, b, c sono tutti numeri naturali.
> Sia:
> $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$;
> il numero razionale m_T si chiama "indice di difficoltà di T".
> Siano:
> a' le parole di tipo c1 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($a' \leq a$);
> b' le parole di tipo c2 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($b' \leq b$);
> c' le parole di tipo c3 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($c' \leq c$).
> Si consideri ora la formula:
> $r_{TS} = (a - a') \times 0{,}1 + (b - b') \times 0{,}3 + (c - c') \times 0{,}4$;
> il numero razionale r_{TS} si chiama "indice di comprensione di T da parte di S".
> Se $r_{TS} = 0$, si considera la comprensione del brano T da parte di S perfetta.
> Se $0 < r_{TS} < m_{T/2}$ si considera la comprensione del brano accettabile o positiva;
> se $m_{T/2} \leq r_{TS} \leq m_T$ si considera la comprensione del brano insufficiente o negativa.
> (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015, pp. 34–35)

Una delle caratteristiche che rende la formula di comprensione da noi scelta particolarmente adatta allo scopo con cui è stata usata in questa ricerca, è che essa è indipendente dalla lingua in cui è scritto il testo base dal quale viene ricavato il testo *cloze*. Infatti, a differenza di formule simili elaborate in precedenza (Gagatsis, 1980, 1982, 1984, 1985, 1995; Gagatsis & Chaney, 1983), i parametri di questa formula, che sono stati ricavati e successivamente raffinati in studi empirici prolungati e condotti in vari paesi (Italia, Svizzera, Colombia), attribuiscono un peso diverso alle parole cancellate, non in base alle loro caratteristiche grammaticali ma, come abbiamo mostrato, in base al loro ruolo nel linguaggio matematico: si distinguono parole comuni, parole che denotano oggetti o relazioni matematiche e parole di carattere logico.

3. Problema di ricerca

Per comprendere meglio la problematica dell'apprendimento in geometria è opportuno esaminare due nodi intorno ai quali essa si articola.

Il primo è di tipo relazionale ed è legato alla tensione espressa dalla relazione tra il modo di vedere iconico e non iconico e si basa sul fatto che, come già accennato, il modo di vedere non iconico, richiesto per l'apprendimento della geometria, non è spontaneo e necessita di un processo di insegnamento-apprendimento specifico. Inoltre, il modo di vedere iconico non può essere considerato propedeutico a quello non iconico; anzi, il primo è un ostacolo all'apprendimento del secondo in quanto i due modi di vedere si basano su assunzioni di fondo inconciliabili in un unico atto percettivo. Questo significa che sarebbe opportuno introdurre a scuola delle attività che favoriscano l'apprendimento del modo di vedere non iconico a partire dai livelli scolastici inferiori, cioè già dalla scuola primaria.

Il secondo nodo intorno al quale si articola la problematica dell'apprendimento della geometria, invece, è di natura semiotica: l'apprendimento in geometria richiede di solito il coordinamento di due registri semiotici distinti, che devono essere coordinati in parallelo (registro verbale e registro figurale) (D'Amore, 2015; Duval, 2005).

La problematica davanti alla quale ci troviamo è dunque duplice: come fare sì che gli alunni acquisiscano già in giovane età (durante gli ultimi anni della scuola primaria) la capacità di vedere le figure geometriche nel modo di vedere non iconico, tenendo contemporaneamente conto della sfida cognitiva dovuta alla necessità di coordinamento dei registri semiotici?

Un primo aspetto su cui è necessario riflettere riguarda la necessità di progettare attività appropriate all'educazione dei bambini della scuola primaria al modo di vedere non iconico. Pur essendo possibile pensare a tali attività senza fare ricorso alle costruzioni geometriche con riga e compasso (Duval, 2017, p. 72), è proprio questo tipo di figura che richiede per definizione che si adotti un modo di vedere non iconico. Infatti, le costruzioni con riga e compasso sono particolarmente adatte per attività di decostruzione dimensionale in quanto in esse le unità figurali delle figure 2-dimensionali possono emergere naturalmente come enti 1-dimensionali o 0-dimensionali, consentendo di stabilire una corrispondenza, attraverso l'operazione di designazione, tra le unità figurali e le corrispondenti unità rappresentative nel registro discorsivo. Per esempio, nel caso classicamente euclideo della costruzione del triangolo equilatero con riga e compasso, il modo di vedere non iconico (a causa della soggiacente decostruzione dimensionale), consente di vedere i vertici del triangolo come intersezioni degli enti geometrici ausiliari, rette e circonferenze, e di associarli al termine "punto di intersezione" nel registro discorsivo.

Tuttavia, è importante sottolineare che non è la costruzione con riga e compasso in sé a consentire di adottare il modo di vedere non iconico e di mettere in atto la decostruzione dimensionale. Infatti, una costruzione geometrica si configura dal punto di vista storico-epistemologico come un problema geometrico risolubile all'interno di un preciso quadro assiomatico, in cui essa ha "come giustificazione della sua correttezza un teorema che stabilisce le relazioni tra i vari elementi della configurazione utilizzata" (Mariotti, 1996, p. 265). Le costruzioni con riga e compasso possono, proprio in virtù di questa corrispondenza, essere usate come avvio alla decostruzione dimensionale, la cui presenza emerge dall'interazione tra la costruzione e il testo della relativa dimostrazione.

Nel lavoro di ricerca qui proposto le costruzioni geometriche vengono usate con uno scopo non strettamente aderente al loro significato epistemologico originario, ma tale uso trova giustificazione proprio nella, se pur complessa, corrispondenza tra soluzione pratica del problema (costruzione geometrica) e la sua soluzione teorica (il teorema che valida tale costruzione). Probabilmente non è un caso che, nel I libro degli *Elementi*, la costruzione del triangolo equilatero appare come prima proposizione, cioè primo teorema: un teorema la cui dimostrazione è data implicitamente dalle proprietà degli strumenti chiamati in causa nella costruzione. Dunque, l'impostazione da noi proposta, in cui la costruzione non è tanto il problema da risolvere e validare, quanto il primo passo nella costruzione di una dimostrazione, passo che presuppone la presenza di un modo di vedere non iconico, il quale si esprime tramite la capacità di decostruzione dimensionale della figura, non è una novità dell'attuale ricerca epistemologica. Questo uso delle costruzioni geometriche è però in ogni caso epistemologicamente giustificabile, basti pensare all'impostazione hilbertiana della geometria, in cui le dimostrazioni hanno uno status indipendente da eventuali rappresentazioni figurali (è sufficiente ricordare le famose parole attribuite a Hilbert da vari autori, secondo cui invece di parlare di punti, rette e piani, si sarebbe potuto parlare di tavoli, sedie e boccali di birra). Vedremo tuttavia più avanti che il nostro approccio è giustificabile anche dal punto di vista semio-cognitivo, seguendo la linea di Duval (2005).

Un secondo aspetto su cui è necessario riflettere, data la giovane età degli allievi che abbiamo deciso di coinvolgere nella ricerca, è quello dell'esigenza di creare un equilibrio tra la necessità di ridurre il più possibile l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinamento dei registri semiotici e l'esigenza di creare le condizioni che facciano sì che tale coordinamento si possa verificare, in quanto la sua presenza è indice della presenza del modo di vedere non iconico. Infatti, come è ben noto, soprattutto le conversioni tra diversi registri semiotici (Duval, 1993) ma anche i trattamenti (D'Amore, 2006), cioè i passaggi da una rappresentazione a un'altra all'interno dello stesso registro semiotico, possono essere causa di perdita (o di cambio) di senso e di conseguenza causa di mancata attribuzione di significato all'attività svolta. D'altro canto, però, secondo il paradosso di Duval (1993), solo attraverso l'uso di diversi registri semiotici il soggetto che apprende può arrivare a non confondere l'oggetto matematico, alla cui costruzione personale mira l'attività didattica, con le sue rappresentazioni semiotiche. Dunque, in generale il coordinamento tra registri semiotici è necessario all'apprendimento e andrebbe incoraggiato. D'altro canto però, tale coordinamento, che è richiesto già durante la fase della costruzione della figura geometrica, costituisce spesso una soglia importante per molti studenti delle scuole superiori e dunque lo sarebbe a maggior ragione per allievi della scuola primaria.

Pur essendo quanto appena detto vero, cioè che in generale il coordinamento di due registri semiotici è necessario all'apprendimento, è anche vero che non in tutti i casi in cui durante un'attività in geometria è presente il registro figurale, esso riveste lo stesso ruolo dal punto di vista semiotico. Duval (2005) distingue due situazioni che si possono presentare: (i) il registro figurale è solo di supporto al registro verbale, che può essere considerato autosufficiente (questo è il caso delle dimostrazioni tipiche della geometria euclidea) (Figura 3); (ii) il registro figurale è autosufficiente e il registro verbale funge solo da supporto (questo è il caso delle dimostrazioni cosiddette "per immagini") (Figura 4). A proposito del caso (i), Duval (2005) scrive infatti quanto segue:[1]

> Un ragionamento che utilizza definizioni e teoremi (che in alcuni casi si chiamano, in maniera impropria e meno teorica, "proprietà") è indipendente da qualsiasi visualizzazione e si può anche realizzare contro ogni visualizzazione. (…) Questo tipo di ragionamento, a differenza dell'argomentazione, dipende da un meccanismo discorsivo di sostituzione di alcune proposizioni da parte di altre, e non dal meccanismo generale e spontaneo di composizione cumulativa di proposizioni. (Duval, 2005, p. 43)

Inoltre:

> È sempre possibile proporre problemi nei quali le figure costituiscono il campo apparente del lavoro di ricerca e che servono da appoggio per i ragionamenti (…) in quel caso ci limitiamo al tipo di situazione (…) della dimostrazione di Euclide, dove la figura può essere solo una rappresentazione ausiliaria, e dove le corrispondenze non sono fatte a livello di ragionamento ma a livello dei termini che designano le unità figurali e a quello delle proposizioni. (Duval, 2005, p. 43)

Dunque, nel caso di una dimostrazione, in cui le proposizioni sono concatenate da un punto di vista sintattico, la rappresentazione figurale funge da appoggio alla dimostrazione, che di per sé potrebbe essere considerata autosufficiente.

[1] La traduzione in italiano è nostra.

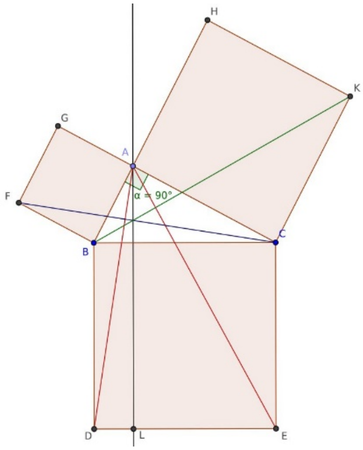


Figura 3. Esempio di costruzione geometrica (registro figurale) che funge da supporto alla dimostrazione del teorema di Pitagora, facendo ricorso al teorema di Euclide.

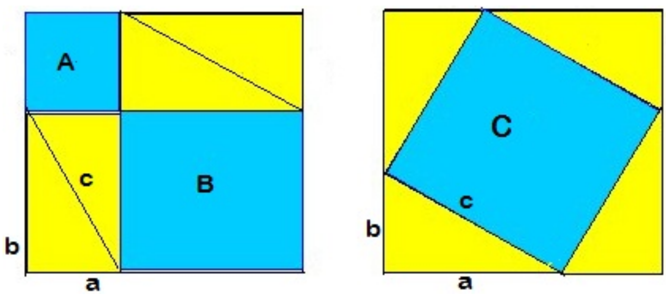


Figura 4. Esempio di dimostrazione per immagini (registro figurale) che fornisce una giustificazione del teorema di Pitagora sfruttando la scomposizione della superficie in poligoni equiestesi.

I casi in cui il registro figurale è autosufficiente presentano difficoltà minori per gli studenti, proprio perché la loro interpretazione si basa sulla sola percezione visiva che di solito non necessita di mediazioni verbali. Questo tipo di prove viene abitualmente proposto ai livelli scolastici inferiori (scuola primaria e scuola secondaria di primo grado) proprio a causa della sua evidenza, anche se è importante tenere presente che pure nelle dimostrazioni per immagini il "vedere" non è sempre immediato, ma potrebbe richiedere alcuni passaggi intermedi, esprimibili sempre nel registro figurale (Duval, 2005, p. 41). Per i livelli scolastici superiori si aderisce invece di solito alla tipologia di dimostrazione basata sul sistema assiomatico della geometria euclidea.

Nel caso particolare delle costruzioni geometriche che fungono da supporto alle dimostrazioni in geometria (secondo l'impostazione da noi scelta e discussa in precedenza), è necessario ribadire che la costruzione geometrica acquisisce significato solo attraverso il "testo esplicativo", in cui vengono esplicitate le inferenze logiche che legano i singoli passaggi della costruzione e conducono alla *necessità logica* del risultato. Sia in un'impostazione tradizionale dell'uso delle costruzioni con riga e compasso, sia in un'impostazione come quella scelta da noi per questa ricerca, vi sono sostanzialmente due fasi in cui si svolge l'attività ad esse connessa; prima fase: si esegue la costruzione con riga e compasso, seguendo le istruzioni fornite tramite un testo scritto; seconda fase: si dimostra la costruibilità della figura geometrica oppure si giustifica il fatto che la costruzione è effettivamente la soluzione del problema proposto. Durante entrambe le fasi è richiesto un coordinamento dei due registri semiotici, figurale e discorsivo, ma il modo di vedere non iconico, e dunque la capacità di decostruzione dimensionale, può emergere solo nella seconda fase. Infatti, è solo nella seconda fase che viene esplicitato il ragionamento che conduce alla necessità logica del risultato, mentre nella prima fase le relazioni tra gli enti geometrici rimangono implicite e la costruzione può essere eseguita senza dover perciò adottare un modo di vedere non iconico: è sufficiente comprendere le istruzioni ed eseguirle. Pur sottolineando l'importanza del coordinamento tra i registri semiotici nella seconda fase, abbiamo ritenuto opportuno individuare modalità di lavoro, pensate soprattutto per gli allievi della scuola primaria, che evitassero il coordinamento dei due registri semiotici durante la fase della costruzione, abbassando così il grado di difficoltà del compito e rendendolo accessibile in maniera autonoma al maggior numero di allievi possibile.

Un ultimo aspetto di cui abbiamo ritenuto necessario tenere conto è legato alla questione se il modo di vedere non iconico, in seguito ad attività in cui lo studente l'ha adottato, viene mantenuto spontaneamente anche in un contesto in cui esso non è espressamente richiesto. Questa è infatti la condizione necessaria affinché tale modo di vedere le figure geometriche possa essere usato in maniera effettiva nella risoluzione di problemi.

4. Domande di ricerca

Le domande di ricerca sono strettamente legate ai due principali nodi intorno ai quali si articola la problematica dell'apprendimento della geometria e possono essere formulate come segue:

1) *La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso senza ricorso al registro discorsivo riduce l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) in allievi di giovane età?*
2) *Quali sono le potenzialità della coppia*
   "costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione"

nell'indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico?

3) *Il ricorso al modo di vedere non iconico è spontaneo negli allievi in contesti che non lo richiedono espressamente?*

Nell'attività di sperimentazione finalizzata alla raccolta dei dati erano coinvolte due classi, ma non sempre nelle attività legate a una domanda di ricerca erano coinvolte entrambe le classi e non sempre con le stesse modalità, come vedremo di seguito.

5. Le strategie di ricerca

La ricerca è stata svolta in una classe IV e in una classe V della scuola primaria, all'inizio dell'anno scolastico, per una durata di due ore in ogni classe. Si è trattato di due classi di un Istituto comprensivo della Provincia di Modena. Le classi erano composte da 20 alunni la IV e da 17 alunni la V, ma in entrambe le classi nel giorno dello svolgimento dell'attività erano assenti alcuni bambini e quindi alla sperimentazione hanno partecipato 17 alunni della IV e 14 alunni della V. In entrambe le classi il rapporto tra maschi e femmine era equilibrato; in IV uno degli alunni ha svolto l'attività affiancato dalla docente di sostegno.

L'obiettivo della ricerca consisteva nel far svolgere ai bambini un'attività che avrebbe dovuto indurli ad adottare un modo di vedere le figure geometriche non iconico, più precisamente il modo di vedere del costruttore. Gli alunni hanno eseguito la costruzione del triangolo equilatero con la riga e il compasso senza che fosse stato detto loro che stessero costruendo tale figura geometrica.

Al fine di verificare il supposto impatto negativo del coordinamento dei registri semiotici sullo svolgimento del compito di costruzione con riga e compasso in bambini di giovane età, e al fine di sperimentare un metodo che possa evitare tale impatto, abbiamo adottato per la fase iniziale due approcci differenti in IV e in V.

In IV la costruzione non richiedeva il coordinamento del registro discorsivo e del registro figurale durante la costruzione poiché ai bambini non è stato consegnato un testo con le istruzioni per la costruzione, ma è stato mostrato loro un video muto, escludendo dunque l'audio, in modo tale che non venisse spiegato che cosa stessero costruendo. L'attività avrebbe dovuto indurre i bambini a riconoscere la figura finale (il triangolo equilatero), adottando il modo di vedere del costruttore. Al fine di poter verificare tale riconoscimento, non abbiamo ritenuto sufficiente chiedere ai bambini quale figura geometrica avessero costruito poiché avrebbero potuto rispondere correttamente senza aver effettivamente adottato un modo di vedere non iconico (per esempio avrebbero potuto misurare la lunghezza dei lati o rispondere fidandosi semplicemente della percezione visiva). Abbiamo invece voluto indagare se tale modo di vedere fosse collegato alla costruzione eseguita; abbiamo cioè voluto verificare se i bambini sarebbero stati in grado di capire il ragionamento che dimostra che la figura costruita doveva essere *necessariamente* un triangolo equilatero. A tale scopo abbiamo realizzato un testo matematico scritto che riportasse per esteso la dimostrazione e abbiamo cancellato una parola ogni cinque,[2] in modo da creare un testo *cloze*, il cui completamento, in base alla formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), avrebbe consentito di misurare in maniera oggettiva la comprensione della dimostrazione e quindi l'attribuzione di significato all'attività e, in ultima istanza, avrebbe consentito di verificare l'effettivo ricorso a un modo di vedere non iconico nei bambini. In effetti, come già evidenziato in precedenza, la costruzione geometrica acquisisce significato solo in funzione alla dimostrazione, a cui funge da supporto, poiché solo in quest'ultima sono presenti i passaggi logici che conducono alla necessità logica del risultato. L'attribuzione di significato alla costruzione geometrica è dunque possibile solo se si è contemporaneamente in grado di comprendere il testo della dimostrazione. D'altro canto, l'attribuzione di significato alla costruzione geometrica presuppone il ricorso a un modo di vedere non iconico, e più precisamente al modo di vedere del costruttore, poiché la necessità logica del risultato ("la figura finale è un triangolo equilatero") si basa sulle proprietà dei tracciati ausiliari, cioè sulle proprietà della circonferenza. I lati del triangolo equilatero emergono come raggi di due circonferenze aventi per ipotesi lo stesso raggio. La decostruzione dimensionale consente di individuare due dei vertici del triangolo come punti di intersezione di un lato del triangolo e due circonferenze aventi tale lato come raggio e il terzo vertice come uno dei punti di intersezione di queste due circonferenze.

A differenza dei bambini in IV, a quelli di V è stato somministrato un testo scritto con le indicazioni per la costruzione del triangolo equilatero, anche in questo caso, senza che venisse loro detto che cosa stessero costruendo. In questo modo si è voluto verificare, come già anticipato in precedenza, quanto la necessità di coordinare due registri semiotici incidesse sulla difficoltà di completamento delle costruzioni geometriche. I risultati delle costruzioni sono stati poi confrontati con quelli della classe IV, dove tale coordinamento di registri era stato evitato attraverso la proiezione del video.

Inoltre, a differenza di quanto fatto in IV, in V abbiamo chiesto ai bambini, prima di somministrare il testo *cloze* da completare, di dire quale figura geometrica avevano costruito e di motivare la loro risposta. Questa richiesta preliminare aveva lo scopo di verificare una prima attribuzione di significato da parte dei bambini all'attività appena svolta (riconoscimento della figura

[2] La scelta di cancellare una parola ogni cinque non è casuale; da un lato, per la soppressione di più di una parola ogni cinque, la riuscita dell'item diventa troppo dipendente dalla riuscita degli item vicini mentre, al contrario, non sembra esserci grande differenza nell'affidabilità della misurazione dell'abilità di "chiusura" del testo tra la cancellazione ogni cinque e la cancellazione ogni sette parole (Gagatsis, 1995, p. 143).

costruita), ma soprattutto quello di verificare le loro motivazioni *spontanee*, prima di procedere al completamento della dimostrazione vera e propria, proposta sotto forma di testo *cloze*.

Il testo dal quale è stato ricavato il *cloze* è stato costruito in maniera tale da riportare la dimostrazione del fatto che la figura costruita è un triangolo equilatero, tenendo conto dei seguenti due aspetti: la lunghezza del testo, che non doveva essere eccessiva; la vicinanza cognitiva al linguaggio dei bambini del linguaggio usato (evitare l'eccessivo ricorso a tecnicismi per loro inconsueti). Al testo così costruito è stata applicata la formula di comprensione, cancellando una parola ogni cinque, non tenendo conto di formule (rientrano tra le formule anche i nomi degli enti matematici espressi attraverso lettere, come per esempio "AC" nell'espressione "il segmento AC") e di segni di punteggiatura. Poiché in un test "di chiusura" come la formula di comprensione che stiamo considerando, la determinazione delle parole da cancellare è "regolare ed allo stesso tempo casuale, ogni categoria di parole può essere soppressa (verbi, nomi, aggettivi, articoli, avverbi ecc." (Gagatsis, 1995, p. 143) e questo sottolinea la neutralità della formula (e dei risultati con essa ottenuti) dalla specificità del testo iniziale.

Al termine del lavoro in V, dopo aver ritirato gli elaborati e aver ringraziato i bambini per la collaborazione, abbiamo avanzato una richiesta che aveva lo scopo di verificare se, sentendosi liberi da pressioni legate al test, avrebbero comunque fatto ricorso alla riga e al compasso per una costruzione identica successiva, mantenendo il modo di vedere non iconico anche in questo contesto.

5.1. Il protocollo della sperimentazione in IV primaria

Il protocollo della sperimentazione nella classe IV prevedeva le seguenti fasi:

- ripasso dei concetti e termini tecnici coinvolti nella sperimentazione;
- consegna agli allievi del materiale cartaceo predisposto per la costruzione con riga e compasso;
- proiezione di un video muto, cioè privo di audio, che mostra la costruzione con riga e compasso del triangolo equilatero;
- riproduzione della costruzione con riga e compasso da parte dei bambini;
- somministrazione di un testo matematico *cloze* costruito secondo i criteri della formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), nel quale i bambini dovevano inserire le parole mancanti (o equisignificanti);
- ritiro degli elaborati.

Il video in cui veniva mostrata la costruzione geometrica del triangolo equilatero (https://www.youtube.com/watch?v=W5Uk4kvPT_c) è stato fatto vedere tre volte, la terza in seguito alla richiesta esplicita di un bambino.

La successiva somministrazione del testo *cloze* doveva indurre i bambini a seguire un ragionamento che portasse a una giustificazione logica del fatto che la figura ottenuta è un triangolo equilatero. Esso aveva dunque lo scopo di verificare se, e in quale misura, i bambini sarebbero stati in grado di comprendere la dimostrazione del fatto che il triangolo da loro costruito è *necessariamente* un triangolo equilatero, ricorrendo al modo di vedere del costruttore.

Il ricorso alla formula di comprensione, e dunque al testo *cloze*, si è basato sui seguenti presupposti: (1) la comprensione del ragionamento nel testo *cloze* è necessaria per il suo completamento; (2) la correttezza del completamento è un indice della comprensione del testo dimostrativo, che può essere misurata in maniera oggettiva tramite la formula di comprensione; (3) la comprensione del testo dimostrativo è necessaria per l'attribuzione di significato alla costruzione geometrica con riga e compasso.

Nel testo della classe IV si è scelto di dividere il testo in due parti e di applicare il conteggio e la cancellazione delle parole su ciascuna delle due parti separatamente. Questa scelta è stata dettata dal fatto che un testo di questo tipo, che richiede più passaggi inferenziali, poteva essere troppo difficile per alunni così giovani e inesperti. Garantire la possibilità di una ripresa corretta del discorso a metà del testo, evitando che si presentasse un'interruzione all'inizio di una frase cruciale del discorso, avrebbe a nostro avviso diminuito ragionevolmente tale grado di difficoltà.

Il testo completo del *cloze* è riportato qui di seguito; le parole evidenziate in grassetto sono le parole che, nel testo consegnato ai bambini, erano state cancellate, dunque che i bambini dovevano individuare. Precisiamo che secondo la formula di comprensione di D'Amore e Fandiño Pinilla (2015) sono considerate corrette anche parole sinonimo di quella cancellata.

> Il segmento AB e il **segmento** AC hanno la stessa lunghezza **perché** sono raggi della stessa **circonferenza**. Anche i segmenti AB e BC **sono** raggi della stessa circonferenza.
> Questo significa che AC e BC hanno **la** stessa lunghezza e che **sono** entrambi lunghi quanto il **segmento** AB. Possiamo concludere che il **triangolo** ABC ha tre lati della **stessa** lunghezza e quindi è **un** triangolo equilatero.

5.2. Il protocollo della sperimentazione in V primaria

Le fasi del protocollo di sperimentazione in V primaria erano le seguenti:

- ripasso dei concetti e termini tecnici coinvolti nella sperimentazione;
- consegna delle istruzioni scritte per la costruzione con riga e compasso del triangolo equilatero;
- costruzione del triangolo equilatero da parte dei bambini;
- verifica del controllo semantico sul compito svolto e delle motivazioni spontanee (richiesta di giustificazione);

- somministrazione di un testo matematico *cloze* costruito secondo i criteri della formula di comprensione di un testo matematico (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015), nel quale i bambini dovevano inserire delle parole mancanti;
- completamento del *cloze* da parte dei bambini;
- ritiro degli elaborati;
- dichiarazione del termine della sperimentazione;
- richiesta rivolta ai bambini di disegnare un triangolo equilatero senza dire con quali strumenti, cioè lasciando loro piena libertà.

Riportiamo qui il testo delle istruzioni che sono state consegnate ai bambini per la costruzione con riga e compasso; nella sua formulazione è stata posta particolare cura nell'uso di un linguaggio il più possibile vicino all'esperienza dei bambini.

> Esegui la costruzione con riga e compasso seguendo le istruzioni.
> Prendi due punti B e C a piacere e disegna il segmento BC con il colore rosso. Disegna la circonferenza con centro in B e raggio BC. Disegna poi la circonferenza con centro in C e raggio CB. Chiama A uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze.
> Disegna con il colore rosso i segmenti AC e AB.

La verifica del controllo semantico sul compito svolto e la richiesta di giustificazione erano formulate nel seguente modo:

> Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?
>
> …………………………………………
>
> Spiega perché.
> Il triangolo ABC è ……………………….. perché…………………………

Come già anticipato, lo scopo della richiesta di giustificazione era quello di verificare una prima attribuzione di significato all'attività svolta da parte dei bambini, ma soprattutto di far emergere le loro motivazioni *spontanee*.

Come anche nel testo somministrato in IV, la successiva somministrazione del testo *cloze* aveva lo scopo di indurre i bambini a seguire un ragionamento che portasse a una giustificazione logica del fatto che la figura ottenuta è un triangolo equilatero.

Il testo completo somministrato ai bambini di V è riportato qui di seguito; le parole evidenziate in grassetto sono le parole che, nel testo consegnato ai bambini, erano state cancellate, dunque che i bambini dovevano individuare.

> Il segmento AB e il **segmento** AC sono raggi della stessa **circonferenza** e quindi hanno la **stessa** lunghezza. Anche i segmenti AB **e** BC sono raggi della stessa **circonferenza**. Se il segmento AC è **lungo** quanto il segmento AB e questo **segmento** a sua volta è **lungo** quanto il segmento BC, allora **i** segmenti AC e BC hanno la **stessa** lunghezza e sono entrambi **lunghi** quanto il segmento AB. Dato

che il triangolo ABC ha tre **lati** uguali, possiamo dire che **è** un triangolo equilatero.

Al termine del lavoro, dopo aver ritirato gli elaborati e aver ringraziato i bambini per la collaborazione e aver dichiarato che il lavoro era terminato, abbiamo chiesto loro di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero. Questa richiesta aveva lo scopo di verificare se i bambini, sentendosi liberi da pressioni legate al test, avrebbero comunque fatto ricorso alla riga e al compasso, mantenendo il modo di vedere non iconico anche in questo contesto, oppure se si sarebbero basati sul modo di vedere iconico, cercando di disegnare a mano libera un triangolo equilatero, senza fare ricorso agli strumenti.

6. Disegno di ricerca e metodi di ricerca

Secondo Denzin e Lincoln un disegno di ricerca è "un insieme flessibile di linee guida che connettono i paradigmi teorici, prima, alle strategie di ricerca e, poi, ai metodi di raccolta del materiale empirico" (Denzin & Lincoln, 2011, cit. in Iori, 2015, p. 126), mentre una strategia di ricerca costituisce un insieme di assunzioni e pratiche che consentono al ricercatore di collegare il paradigma di ricerca al piano della raccolta empirica dei dati.

Il paradigma teorico all'interno del quale si colloca la nostra ricerca è quello pragmatista (D'Amore, 2001; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017). In relazione al quadro teorico di riferimento, l'impostazione pragmatista può essere confermata da almeno due aspetti. Il primo aspetto riguarda il fatto che Duval assume che i diversi modi di vedere da lui teorizzati non sono abilità presenti nell'individuo e che il docente deve "risvegliare" ma che essi devono essere acquisiti *ex novo* dallo studente e che richiedono una didattica specifica. Il secondo aspetto riguarda invece la formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015); tale formula, nonostante renda oggettivamente misurabile la comprensione di un testo, si basa non su una presunta invarianza (e quindi esistenza oggettiva) degli oggetti matematici ma sulla invarianza relazionale che li definisce implicitamente e consente di verificare la comprensione del loro uso in un dato contesto, espresso attraverso il testo su cui viene applicata la formula di comprensione.

Le strategie di ricerca da noi adottate sono state esposte nel capitolo precedente. Per quanto riguarda gli approcci all'analisi dei dati, ci siamo serviti sia di un approccio di tipo comparativo (vengono comparati dati provenienti da due campioni qualitativamente diversi per individuare le differenze quantitative relative a un dato parametro) sia di un approccio di tipo inferenziale (da dati quantitativi ricavati dal campione si traggono generalizzazioni qualitative, oppure si verificano ipotesi, relative alla popolazione) (Viganò, 1999, p. 91); precisiamo inoltre che, anche nel caso di un approccio comparativo ai dati, nella fase conclusiva, cioè quella dell'interpretazione, è stato adottato un approccio inferenziale.

I metodi di ricerca, pur essendo prevalentemente di carattere quantitativo, configurano un quadro di ricerca complesso, in cui sono presenti sia un modello misto sia un metodo misto (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, cit. in Iori, 2015, p. 127). Infatti, abbiamo sia una combinazione di metodi quantitativi con metodi qualitativi in una stessa fase (ricerca a modello misto), sia una convivenza tra fasi a metodo qualitativo e fasi a metodo quantitativo tra loro separate (ricerca a metodo misto). Adattando il modello di Johnson e Onwuegbuzie (2004) alla ricerca da noi condotta, chiameremo di seguito *metodo quantitativo con modello misto nidificato* un quadro metodologico di ricerca prevalentemente quantitativo in cui sono presenti fasi a modello misto nelle quali si mescolano analisi quantitative e qualitative; useremo invece il termine "approccio" nel distinguere: (a) l'approccio comparativo ai dati da quello inferenziale; (b) i metodi adottati in un singolo atto di raccolta dati, che può essere o qualitativo o quantitativo.

Distinguiamo le strategie e i metodi di ricerca in base alle domande di ricerca.

1) *La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso senza ricorso al registro discorsivo (tramite la somministrazione di un video muto) riduce l'impatto cognitivo dovuto alla necessità di coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) in particolare modo in allievi di giovane età?*

Per rispondere a questa domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio comparativo e successivamente inferenziale a modello misto. Dopo aver diversificato le modalità di somministrazione delle istruzioni nella classe IV e nella classe V, sono stati valutati i risultati delle costruzioni in termini di tempo impiegato per la costruzione (approccio quantitativo) e autonomia degli allievi nel completamento del compito, verificata tramite il numero di richieste di aiuto rivolte alla ricercatrice (approccio quantitativo) e tramite una valutazione complessiva dell'esattezza e dell'accuratezza della costruzione (approccio qualitativo). Successivamente, i risultati delle due classi sono stati confrontati tra loro (approccio comparativo), confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale). La scelta di confrontare due campioni qualitativamente diversi (una classe IV e una classe V) è dovuta al fatto che ci è sembrato opportuno testare l'eventuale beneficio tratto da uno dei due metodi di somministrazione delle istruzioni (quello tramite video risultava a nostro avviso già in partenza più immediato e quindi più avvantaggiato) su un campione che non fosse equivalente, ma che avesse un leggero svantaggio cognitivo dovuto all'età. In questo modo l'eventuale vantaggio derivante dal metodo di somministrazione tramite il video avrebbe consentito di trarre conclusioni più significative sul beneficio che si può ottenere con esso.

2) *Quali sono le potenzialità della coppia*

“costruzione con riga e compasso - relativa dimostrazione” nell’indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico?

Per rispondere a questa domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio inferenziale puramente quantitativo in IV e un approccio inferenziale a metodo quantitativo con modello misto nidificato in V.

Complessivamente (considerando l’attività in IV *e* in V) l’approccio di ricerca alla seconda domanda di ricerca è stato dunque di tipo inferenziale a metodo quantitativo con modello misto nidificato.

Il punto di partenza comune per entrambe le classi era costituito dal fatto che gli alunni hanno eseguito la costruzione del triangolo equilatero con la riga e il compasso senza che fosse stato detto loro che stavano costruendo tale figura geometrica. In IV si è trattato tra l’altro della prima volta che i bambini stavano usando il compasso.

Agli allievi di IV è stato somministrato un testo *cloze* tratto dal testo dalla dimostrazione del fatto che la figura costruita in precedenza è un triangolo equilatero. L’attività che coinvolgeva la coppia:

“costruzione riga e compasso - relativa dimostrazione”

avrebbe dovuto indurre i bambini ad adottare un modo di vedere le figure geometriche non iconico, la cui presenza durante l’attività sarebbe stata rilevata dal grado di comprensione del testo *cloze*, determinato tramite l’indice di comprensione, applicando la formula di comprensione (approccio quantitativo tramite gli indici di comprensione). Il calcolo della percentuale di bambini che hanno ottenuto un indice di comprensione positivo (approccio quantitativo), avrebbe consentito di stabilire quale percentuale di allievi ha fatto ricorso al modo di vedere non iconico durante l’attività di completamento del testo *cloze* (approccio quantitativo).

Successivamente, i risultati ottenuti sarebbero stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

Un aspetto che riteniamo importante discutere qui è legato all’efficacia della formula di comprensione nella misurazione del grado di comprensione della dimostrazione. In prima battuta possiamo affermare che la formula di comprensione di un testo di matematica è un valido strumento di rilevazione del grado di comprensione del testo da noi usato poiché, trattandosi del testo di una dimostrazione, esso è non solo un testo *di* matematica, ma *il* testo matematico per eccellenza, e quindi per definizione sottoponibile a un esame con la formula; inoltre, il peso elevato attribuito al riconoscimento delle parole a carattere logico rende possibile una distinzione sufficientemente accurata tra coloro che comprendono la dimostrazione e coloro che non la comprendono. Ci si potrebbe tuttavia chiedere se e perché il grado di comprensione di un testo *cloze* possa essere ritenuto significativo dal punto di vista cognitivo, per esempio rispetto alla semplice lettura del testo della dimostrazione. A nostro avviso il completamento di un testo *cloze* costringe il soggetto a cercare di allineare due visioni dello stesso oggetto matematico: quella implicita nel testo e quella propria del soggetto; questo allineamento non può tuttavia avvenire se si agisce in maniera passiva; esso deve emergere da una dialettica tra le due visioni, ottenuta tramite un'attività *intenzionale* di designazione degli elementi coinvolti, da parte del soggetto, con certi termini scelti al posto di altri, in accordo con la sua propria visione. Ciò che viene dunque espresso attraverso il grado di comprensione del testo *cloze* è in realtà il grado di allineamento tra queste due visioni. Supposto che ciò che si desidera ottenere sia la comprensione di un dato testo (nel nostro caso quello della dimostrazione), è proprio la qualità del completamento del *cloze* da esso ricavato che consente di misurare tale comprensione.

A differenza di quanto fatto in IV, l'attività relativa alla seconda domanda di ricerca in V si è svolta in due fasi. Durante la prima fase abbiamo rivolto agli allievi una richiesta di attribuzione di significato e di giustificazione dell'attività svolta (dovevano dire quale figura pensavano di aver disegnato e perché), calcolando successivamente la percentuale di allievi che ha riconosciuto la figura costruita come triangolo equilatero (approccio quantitativo) e valutando gli elementi argomentativi nella giustificazione dell'affermazione attraverso un approccio qualitativo.

La seconda fase è stata condotta con un approccio esclusivamente quantitativo ed era analoga a quella condotta in IV.

Anche per questa domanda di ricerca, i risultati ottenuti sono stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

3) *Il ricorso al modo di vedere non iconico è spontaneo negli allievi in contesti che non lo richiedono espressamente?*

Per rispondere all'ultima domanda di ricerca abbiamo adottato un approccio inferenziale con metodo quantitativo. Nell'attività di raccolta dati relativa a questa domanda è stata coinvolta solo la classe V. In un contesto diverso da quello precedente, ai bambini è stato chiesto di rispondere a una richiesta che avrebbe lasciato loro la scelta di ricorrere a un modo di vedere iconico o non iconico (si trattava di una richiesta di lasciare alla persona che ha condotto la sperimentazione un regalo consistente nel disegno di un triangolo equilatero). Successivamente è stata calcolata la percentuale di bambini che ha risposto alla richiesta eseguendo una costruzione con la riga e il compasso invece di effettuare un disegno a mano libera.

Anche in questo caso, i risultati ottenuti sono stati confrontati con le ipotesi di risposta e usati per trarre conclusioni relativamente alla domanda di ricerca (approccio inferenziale).

Complessivamente la strategia di ricerca può essere riassunta nel seguente schema (Tabella 3).

Tabella 3
Schema riassuntivo dei metodi di ricerca

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">Domanda di ricerca</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Domanda di ricerca n. 1
Approccio comparativo e successivamente inferenziale con modello misto</td><td colspan="2">Domanda di ricerca n. 2
Approccio inferenziale con metodo quantitativo con modello misto nidificato</td><td>Domanda di ricerca n. 3
Approccio inferenziale con metodo quantitativo</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Fase delle attività di ricerca</td><td colspan="3">Fase 1
Raccolta dati con metodo misto
(dopo diversificazione delle modalità di istruzione per la costruzione tra IV e V)</td><td colspan="2">Fase 1
Raccolta dati con metodo quantitativo a modello misto nidificato</td><td>Fase 1
Raccolta dati con metodo quantitativo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Classi IV e V</td><td>Classe IV</td><td>Classe V</td><td>Classe V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Metodo quantitativo (tempi di esecuzione)</td><td colspan="2">Metodo misto (autonomia di esecuzione)</td><td rowspan="2">Metodo quantitativo (indici di comprensione)</td><td>Fase 1.1
Metodo misto [numero di alunni che hanno riconosciuto la figura (quant.) + valutazione elementi di giustificazione (qual.)]</td><td rowspan="2">Metodo quantitativo (percentuale allievi che usano spontaneamente riga e compasso)</td></tr>
<tr><td>Metodo quantitativo (numero richieste d’aiuto rivolte alla ricercatrice)</td><td>Metodo qualitativo (correttezza e accuratezza complessiva della costruzione)</td><td>Fase 1.2
Metodo quantitativo (indici di comprensione)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 2
Interpretazione dati per le singole classi</td><td colspan="2" rowspan="2">Fase 2
Interpretazione dati</td><td rowspan="2">Fase 2
Interpretazione dati</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 3
Approccio comparativo tra i dati delle due classi</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fase 4
Approccio inferenziale in riferimento all’ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td><td colspan="2">Fase 3
Approccio inferenziale in riferimento all’ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td><td>Fase 3
Approccio inferenziale in riferimento all’ipotesi di risposta e alla domanda di ricerca</td></tr>
</table>

7. Ipotesi di risposta

La somministrazione delle istruzioni per le costruzioni con riga e compasso tramite la proiezione di un video avrebbe dovuto offrire a nostro avviso un vantaggio significativo soprattutto ad allievi molto giovani e inesperti come quelli della scuola primaria. La scelta di confrontare due campioni qualitativamente non equivalenti (una classe IV e una classe V) doveva rendere il confronto tra le modalità di somministrazione più equilibrato ma soprattutto, nel caso di un vantaggio significativo a favore della somministrazione tramite il video, avrebbe potuto mostrare che le costruzioni con riga e compasso sono cognitivamente accessibili anche a bambini di età molto giovane (classe IV), a patto che si adottino alcuni accorgimenti. Le nostre attese erano di un netto vantaggio in termini di tempo e di qualità di esecuzione della costruzione nel caso del metodo di somministrazione tramite il video muto. Inoltre ritenevamo che la coppia:

"costruzione riga e compasso - relativa dimostrazione"

fosse in grado di indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico e che l'effettiva presenza di questo modo di vedere fosse presupposto per la comprensione del testo *cloze* (e quindi per il suo completamento). Ci attendevamo una percentuale di successi (indice di comprensione positivo) per il 50% del campione in V e una percentuale minore in IV. Ritenevamo invece poco probabile che durante la richiesta di giustificazione prima della somministrazione del *cloze* in V, i bambini facessero riferimento alla costruzione geometrica per giustificare il riconoscimento della figura riconosciuta. Abbiamo supposto che avrebbero risposto basandosi sull'evidenza oppure su aspetti metrici, ma che non avrebbero adottato una decostruzione dimensionale e quindi il modo di vedere non iconico.

Avevamo supposto che il modo di vedere non iconico non fosse spontaneo anche in allievi che avessero seguito un'attività finalizzata alla sua acquisizione e che essi non lo avrebbero adottato spontaneamente in un contesto che non lo richiedesse espressamente. Avevamo ritenuto che solo una percentuale bassa di allievi (e comunque non superiore alla percentuale che ha ottenuto un indice di comprensione positivo) potesse adottare comunque il modo di vedere non iconico fuori dal contesto in cui lo ha sperimentato.

8. Risultati oggettivi della ricerca

In IV tutti i bambini sono riusciti a riprodurre la costruzione con riga e compasso senza particolari difficoltà. Solo un bambino ha chiesto aiuto; il tempo medio di esecuzione, compresa la proiezione del video, è stato di circa 6 minuti e la qualità delle costruzioni è buona, cioè gli elementi riportati nel video sono tutti presenti e le relazioni tra gli enti geometrici coinvolti sono riprodotte correttamente.

Di seguito (Figure 6.1–6.3) riportiamo alcuni esempi di tali costruzioni.

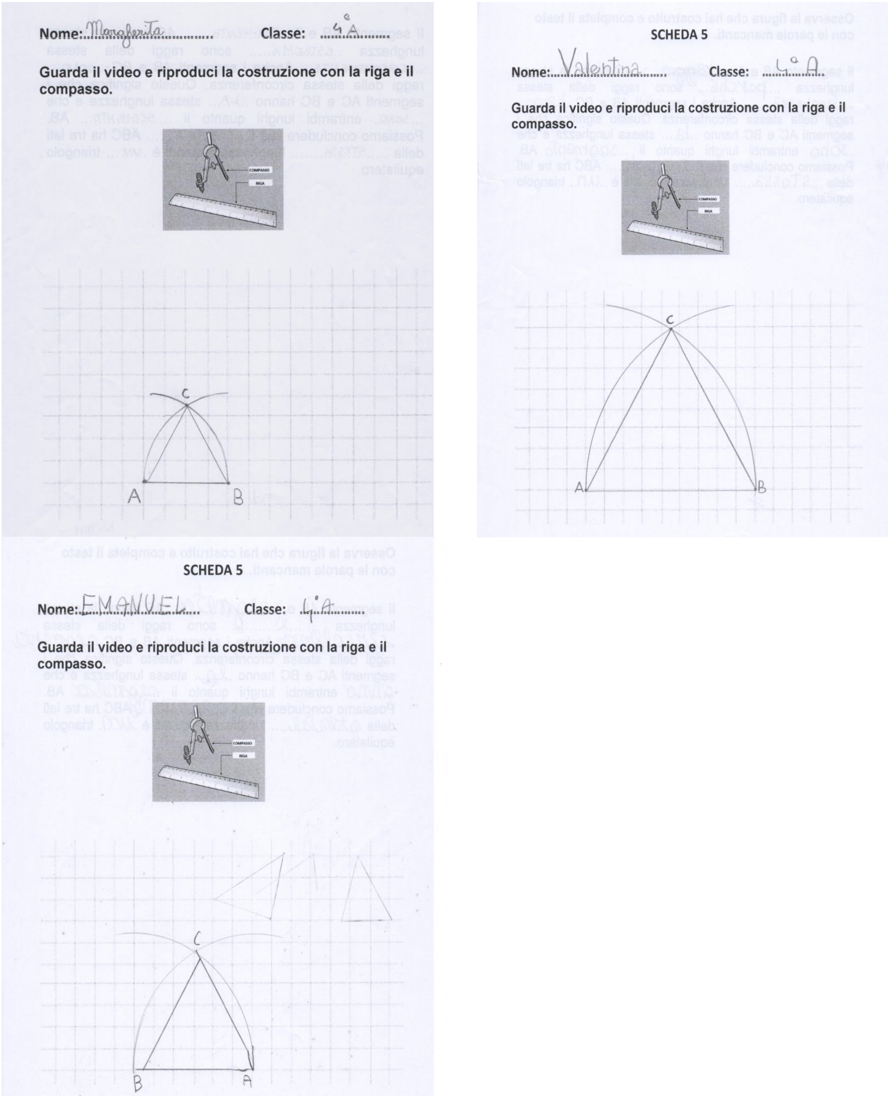
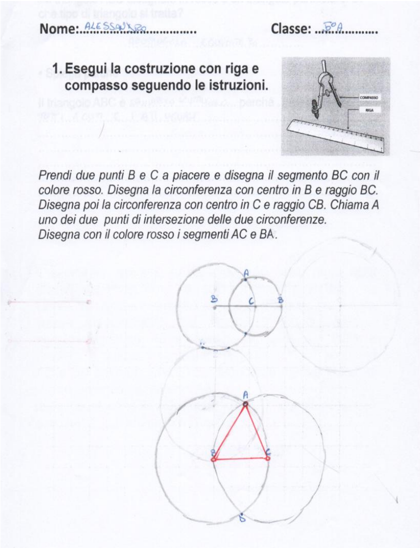
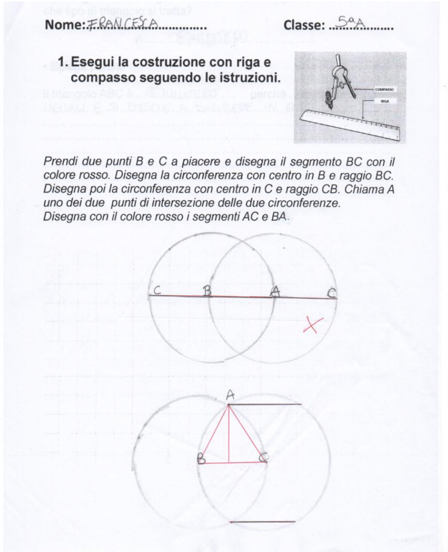


Figure 6.1–6.3. Alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di IV.

I bambini di V, che hanno eseguito la costruzione con riga e compasso seguendo le istruzioni scritte, hanno incontrato difficoltà nella comprensione delle istruzioni; circa la metà ha chiesto almeno una volta l'aiuto della ricercatrice ed è riuscito a completare la costruzione solo dopo alcuni tentativi. Il tempo medio per la costruzione è stato di circa 15 minuti e la qualità delle costruzioni è relativamente bassa per circa un terzo degli allievi, poiché nelle loro costruzioni le relazioni tra gli enti coinvolti sono emerse solo in seguito alla mediazione della ricercatrice e in molte di esse sono stati introdotti elementi non presenti nelle istruzioni. Le immagini qui di seguito riportate

(Figure 7.1–7.3) mostrano alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di V.





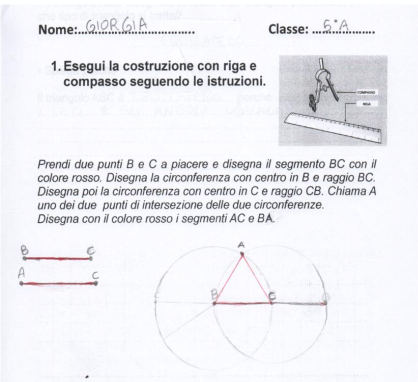
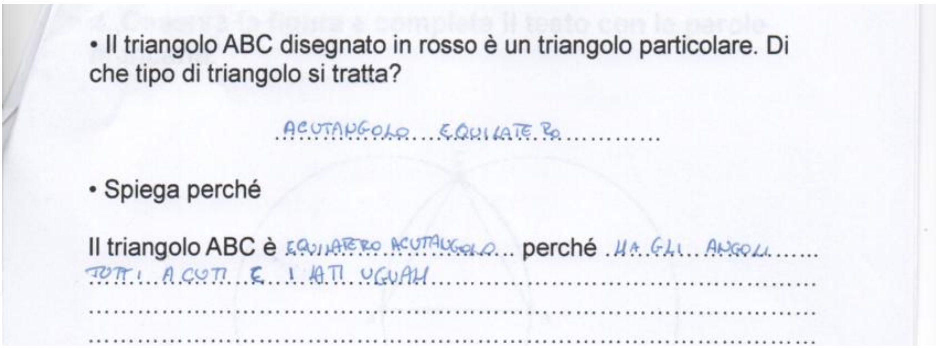


Figure 7.1–7.3. Alcuni esempi delle costruzioni eseguite dai bambini di V.

Nella fase relativa alla richiesta di attribuzione di significato all'attività svolta con riga e compasso, l'85% degli allievi (ricordiamo che erano coinvolti solo i bambini di V) ha riconosciuto di aver costruito un triangolo equilatero; alcuni di loro hanno aggiunto ulteriori caratteristiche, per esempio il fatto che si tratta di un "triangolo acutangolo" oppure che può essere diviso in due parti "uguali" o che ha gli angoli "uguali". Nella giustificazione nessun allievo ha fatto riferimento alla proprietà del triangolo costruito emergenti dalle proprietà delle circonferenze.

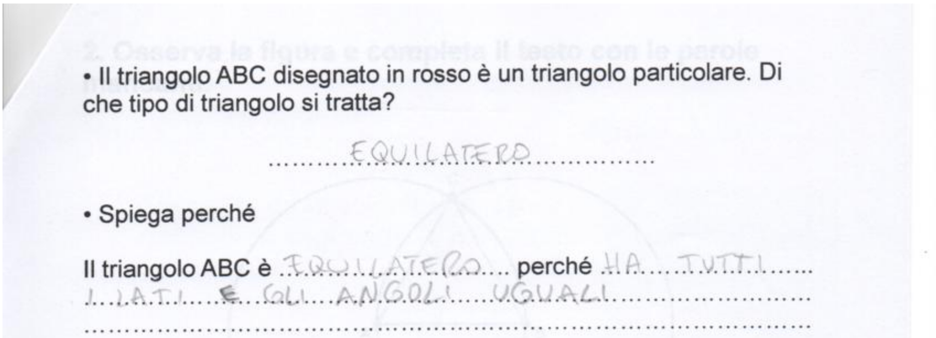
Le immagini riportate di seguito (Figure 8.1–8.3) mostrano alcune schede completate dai bambini.


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

ACUTANGOLO EQUILATERO

• Spiega perché

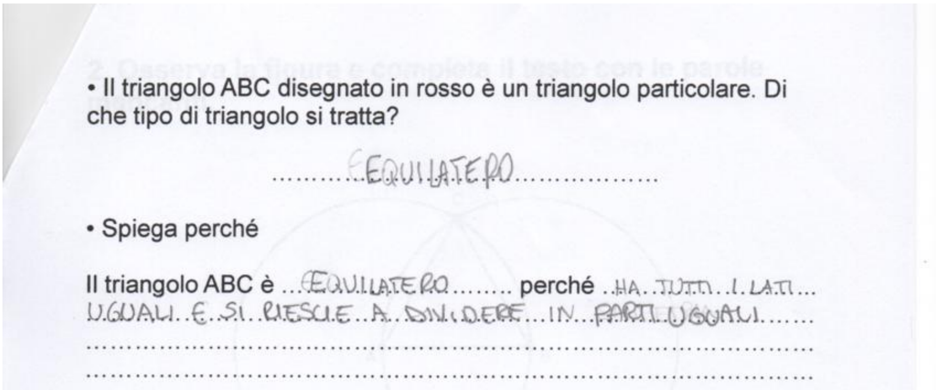
Il triangolo ABC è EQUILATERO ACUTANGOLO perché HA GLI ANGOLI TUTTI ACUTI E I LATI UGUALI


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

EQUILATERO

• Spiega perché

Il triangolo ABC è EQUILATERO perché HA TUTTI I LATI E GLI ANGOLI UGUALI


• Il triangolo ABC disegnato in rosso è un triangolo particolare. Di che tipo di triangolo si tratta?

EQUILATERO

• Spiega perché

Il triangolo ABC è EQUILATERO perché HA TUTTI I LATI UGUALI E SI RIESCE A DIVIDERE IN PARTI UGUALI

Figure 8.1–8.3. Alcuni esempi delle giustificazioni fornite dai bambini.

Nel testo *cloze* proposto in IV le parole cancellate possono essere classificate come segue:

- parole di tipo a: *sono* (2 volte), *la*, *stessa*, *un*;
- parole di tipo b: *segmento* (2 volte), *circonferenza*, *triangolo*;
- parole di tipo c: *perché*.

L'indice di difficoltà del testo può dunque essere calcolato come segue:

- $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$
- $a = 5$; $b = 4$; $c = 1$

- $m_T = 5 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 = 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}4 = 2{,}1$.

I risultati ottenuti nella classe IV sono riassunti in Tabella 4.

Tabella 4
Risultati dell'analisi del test di comprensione della classe IV

Risultati ottenuti	Punteggi r_{TS} ottenuti
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione negativa ($r_{TS} \geq 1{,}05$): 6	1,2; 1,8; 1,4; 1,5; 1,1; 1,1
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione positiva ($r_{TS} < 1{,}05$): 11	1,0; 1,0; 0,6; 0,4; 0,6; 0,6; 1,0; 0,9; 1,0; 1,0; 1,0
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione perfetta ($r_{TS} = 0$): 0	

Nel testo *cloze* proposto in V le parole cancellate possono essere classificate come segue:

- parole di tipo a: *stessa* (2 volte), *lungo* (2 volte), *i*, *lunghi*;
- parole di tipo b: *segmento* (2 volte), *lati*, *circonferenza* (2 volte);
- parole di tipo c: *e*, *che*, *è*.

Dunque, l'indice di difficoltà del testo di matematica somministrato in V può essere calcolato come segue:

- $m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4$
- $a = 6$; $b = 5$; $c = 3$
- $m_T = 6 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}4 = 0{,}6 + 1{,}5 + 1{,}2 = 3{,}3$.

I risultati ottenuti nella classe V sono riassunti in Tabella 5.

Tabella 5.
Risultati dell'analisi del test di comprensione della classe V

Risultati ottenuti	Punteggi r_{TS} ottenuti
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione negativa ($r_{TS} \geq 1{,}65$): 2	2,3; 2,2
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione positiva ($r_{TS} < 1{,}65$): 12	0,7; 0,9; 0,4; 1,1; 0,4; 1,1; 0,7; 0,6; 1,0; 0,9; 0,7; 0,5
Numero di alunni che hanno ottenuto una comprensione perfetta ($r_{TS} = 0$): 0	

La richiesta finale, dopo aver dichiarato terminata l'attività in V, di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero da regalare, come ricordo, alla persona che ha condotto la sperimentazione, è stata eseguita da tutti i bambini e circa metà di loro ha fatto ricorso alla riga e al compasso mentre l'altra metà ha fatto un disegno a mano libera.

9. Discussione dei risultati

Il confronto dei risultati ottenuti in IV e in V in riferimento alla costruzione con riga e compasso mostra che la somministrazione delle istruzioni attraverso la proiezione di un video muto, evitando dunque il coordinamento di due registri semiotici, facilita in maniera significativa gli allievi, consentendo di concludere l'attività autonomamente e in maniera soddisfacente. La facilitazione emerge chiaramente sia dai tempi di esecuzione (dimezzati in IV rispetto a quelli in V), sia dal grado di accuratezza delle costruzioni, sia dalla correttezza delle relazioni tra gli enti geometrici coinvolti.

Analizzando le costruzioni dei bambini soprattutto in V è emerso che molti di loro hanno inserito nella costruzione elementi la cui presenza non emerge dal testo delle istruzioni. L'aggiunta di queste informazioni può essere interpretata come il frutto di una possibile clausola del contratto didattico (Brousseau, 1980, 1986; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017), secondo la quale la maestra è tanto più soddisfatta della prestazione di un allievo quante più cose egli sa dire o fare, ma può essere interpretata anche come un tentativo di superare la tensione derivante dal disagio dovuto alla difficoltà di comprensione del compito da svolgere.

L'elevata percentuale di allievi di V che ha riconosciuto di aver costruito un triangolo equilatero (85%) è un indice del fatto che i bambini hanno attribuito un significato all'attività svolta. Il fatto che nella richiesta di giustificazione essi abbiano fatto riferimento ad aspetti metrici (per esempio riferimenti all'uguaglianza degli angoli oppure al fatto che il triangolo "può essere diviso in due parti uguali") per motivare il fatto che si tratti di un triangolo equilatero e il fatto che nessuno di loro abbia fatto riferimento alle proprietà degli enti geometrici coinvolti nella costruzione (cioè ai raggi delle circonferenze) mostra che il modo di vedere non iconico non è presente in questa fase del lavoro. Evidentemente non ci aspettavamo che i bambini fornissero una giustificazione logica del fatto di aver riconosciuto la figura costruita come triangolo equilatero; le loro giustificazioni spontanee si basavano infatti esclusivamente sull'evidenza, indotta dal modo di vedere iconico, messa in relazione con le nozioni acquisite a scuola relativamente ai triangoli equilateri. Sembra che la figura costruita appaia ai bambini su un piano diverso rispetto ai tracciati ausiliari che l'hanno fatta emergere ed è proprio il modo di vedere iconico che impone questa separazione tra la figura ottenuta e i tracciati costruiti per farla emergere. Dunque, il modo di vedere iconico vanifica l'efficacia cognitiva che le costruzioni geometriche possiedono in virtù del fatto che incorporano in maniera costruttiva la definizione di un ente geometrico oppure la risoluzione di un problema. Questo aspetto sembra confermare inoltre il fatto che il registro figurale non sia autosufficiente e che le costruzioni con riga e compasso di per sé non sono in grado di indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico.

Dai dati mostrati in Tabella 4 è possibile desumere che la comprensione del testo di matematica da parte degli alunni della classe IV è positiva (dunque sufficiente) per circa il 65% della classe ed è negativa (dunque insufficiente) per la restante parte degli alunni. Dalla Tabella 5 si desume che l'attività svolta in V ha prodotto esiti migliori rispetto a quella svolta in IV: 85% degli alunni ha ottenuto un livello di comprensione positivo e solo il 15% degli alunni la comprensione è stata negativa. Dato che il completamento del testo *cloze* doveva fornire informazioni sull'acquisizione di un modo di vedere non iconico da parte degli alunni, questa percentuale mostra che il lavoro svolto in classe sulle costruzioni geometriche è in grado di far acquisire tale modo di vedere anche ai bambini più giovani. Ci sembra inoltre possibile concludere, confrontando i risultati della IV e della V, che le competenze in questo campo evolvono velocemente nei bambini e che esse raggiungono un livello adeguato al compito proposto già all'inizio dell'ultimo anno della scuola primaria. La scelta di coinvolgere nella ricerca due classi diverse tra loro, soprattutto dal punto di vista della maturazione cognitiva dei bambini, è stata importante anche da questo punto di vista, poiché ha consentito di inquadrare il fenomeno in una prospettiva di evoluzione in verticale, ma anche di mostrare che esso può essere affrontato a diversi livelli.

In riferimento ai risultati relativi al completamento del testo *cloze*, riteniamo che la casualità nella determinazione delle parole da inserire per completarlo, in quanto frutto dell'applicazione di un algoritmo oggettivo che può essere assimilato a un campionamento casuale, rappresenti un importante fattore a favore dell'indipendenza dei risultati della ricerca dalla scelta del testo iniziale, tenendo naturalmente conto dei vincoli imposti dall'età cognitiva dei soggetti coinvolti, che hanno influenzato la sua formulazione iniziale.

La richiesta finale, rivolta ai bambini di V, di prendere un foglio e di disegnare un triangolo equilatero da regalare come ricordo alla persona che ha svolto la ricerca, è stata espressa volutamente dopo aver dichiarato che il lavoro era terminato, dopo aver lodato i bambini per il loro impegno e aver creato una situazione più simile a quella che si ha durante la ricreazione o durante attività ludiche in generale. Il fatto di chiedere loro di eseguire il disegno su un foglio non consegnato dalla ricercatrice aveva la finalità di farli sentire liberi di eseguire la richiesta solo se lo desideravano e nel modo in cui ritenevano più opportuno farlo. Dato che l'85% dei bambini aveva ottenuto un indice di comprensione positivo nella somministrazione del testo *cloze* e aveva dunque adottato un modo di vedere non iconico durante il completamento, ci si poteva aspettare che una percentuale elevata di allievi adottasse la riga e il compasso per costruire un triangolo equilatero, riconoscendo il vantaggio della costruzione almeno in termini di accuratezza rispetto al disegno a mano libera. Il fatto che solo il 50% dei bambini della classe abbia usato la riga e il compasso per soddisfare questa richiesta, mostra che l'educazione al modo di vedere non iconico richiede un lavoro mirato e prolungato nel tempo, che stabilizzi l'apprendimento e consenta all'alunno di ricorrere a esso spontaneamente, anche in situazioni che non lo richiedono esplicitamente.

Infine, riteniamo importante sottolineare che la nostra è stata una ricerca di carattere intensivo, mirata all'inquadramento e alla caratterizzazione di un fenomeno che intendevamo studiare; questo non vieta naturalmente che da essa possano scaturire anche ricerche estensive e comparative su più larga scala, che sarebbero però tutt'altra cosa e, per loro stessa natura, richiederebbero tempi molto più lunghi e metodologie di ricerca diverse. Per quanto riguarda la presente ricerca, il tempo previsto per la sperimentazione: due ore in ciascuna delle due classi, è stato pienamente sufficiente per svolgere l'attività.

10. Risposte alle domande di ricerca

La ricerca condotta conferma l'ipotesi relativa alla prima domanda di ricerca, cioè il fatto che il coordinamento di due registri semiotici è un ostacolo importante alla produzione di costruzioni con riga e compasso. Inoltre, la ricerca ha consentito di mostrare che la proiezione di un video muto, quindi la riduzione a una riproduzione gestuale dei passaggi della costruzione, consente di rendere le costruzioni con riga e compasso cognitivamente accessibili anche ai bambini (degli ultimi anni) della scuola primaria.

Riguardo alla seconda domanda di ricerca, un aspetto che necessita di essere ribadito è legato al fatto che la costruzione geometrica in sé, al contrario di quanto si possa credere, non è sufficiente per far adottare agli allievi il modo di vedere non iconico. Questo aspetto è particolarmente importante per far capire perché riteniamo che solo la coppia: "costruzione geometrica - relativa dimostrazione", in cui la dimostrazione è fornita come testo *cloze*, abbia potenzialità particolarmente elevate nell'indurre ad adottare il modo di vedere non iconico. Abbiamo potuto notare che, una volta riconosciuta, la figura costruita appare agli allievi disconnessa dai tracciati ausiliari, essa viene cioè percepita con un modo di vedere puramente iconico, che rileva solo le sue caratteristiche metriche e topologiche. Ciò che consente agli allievi di "spingere" la figura all'interno della costruzione, adottando un modo di vedere non iconico, è la comprensione della relativa dimostrazione, che viene resa più agevole dal completamento di un testo *cloze* piuttosto che dalla sua produzione autonoma.

Riguardo alla terza domanda di ricerca possiamo affermare che il ricorso al modo di vedere non iconico non è spontaneo negli allievi anche se essi l'hanno già adottato in precedenza, addirittura riguardo alla stessa figura geometrica. Infatti, come è stato possibile notare, una volta concluso il lavoro, solo una parte dei bambini (circa la metà della classe e poco più del 40% di coloro che avevano ottenuto una comprensione positiva nel completamento del testo *cloze* e avevano quindi adottato un modo di vedere non iconico) ha mantenuto il modo di vedere non iconico nel rispondere alla richiesta di disegnare un triangolo equilatero, mentre gli altri sono scivolati di nuovo nel modo di vedere iconico nonostante l'attività appena svolta.

11. Conclusioni

La ricerca condotta in classe ha permesso di verificare l'utilità del ricorso a compiti che sfruttano la coppia "costruzioni con riga e compasso - relativa dimostrazione" anche nella scuola primaria. La coordinazione tra queste due componenti è particolarmente utile nell'ottica di un'educazione al modo di vedere non iconico, indispensabile per l'apprendimento in geometria; essa può inoltre costituire un valido primo approccio alla dimostrazione anche per bambini di giovane età (e, a maggior ragione, per allievi della scuola secondaria di primo grado). Particolarmente promettente sembra in questo contesto la somministrazione del testo della dimostrazione sotto forma di testo *cloze*, accessibile cognitivamente anche ai bambini della scuola primaria. L'impiego della formula di comprensione di un testo di matematica (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015) ci ha permesso di ottenere una valutazione quantitativa, dunque misurabile, di tale comprensione. In riferimento alla coppia: "costruzione geometrica - relativa dimostrazione", possiamo dire che, dato che la comprensione del testo della dimostrazione è presupposto per l'attribuzione di significato all'attività svolta (l'allievo deve aver compreso i nessi logici tra i vari passaggi per poter adottare il modo di vedere del costruttore nel momento in cui analizza la figura), il grado di comprensione del testo, stabilito tramite la formula di comprensione, misura l'attribuzione di significato all'attività svolta e mette contemporaneamente in evidenza l'eventuale ricorso al modo di vedere non iconico.

Una problematica importante dell'attuazione di attività di questo tipo è legata alla difficoltà che soggetti così giovani incontrano nel riuscire a coordinare due registri semiotici (figurale e discorsivo) durante la fase della costruzione geometrica. I due approcci differenti adottati nella fase iniziale in IV e in V hanno infatti confermato che il coordinamento dei registri semiotici figurale e discorsivo rappresenta un ostacolo all'assolvimento di un compito di questo tipo, ma hanno anche mostrato che tale ostacolo può essere superato efficacemente tramite l'impiego di un video. Questa scelta riduce l'impatto del registro discorsivo nella consegna e rende le costruzioni con riga e compasso cognitivamente accessibili anche a bambini più giovani. Ciò che abbiamo inoltre potuto constatare è che la costruzione con riga e compasso, anche se somministrata con il metodo classico del testo scritto, non è sufficiente di per sé per indurre gli allievi ad adottare un modo di vedere non iconico.

La ricerca ha consentito infine di mostrare che l'educazione al modo di vedere non iconico richiede un lavoro costante e protratto nel tempo perché solo sotto queste condizioni l'alunno si potrà abituare al ricorso a tale modo di vedere anche in situazioni che non lo richiedono esplicitamente e potrà acquisire la necessaria competenza per farne uso spontaneo durante la risoluzione di problemi o nella produzione di dimostrazioni in geometria.

Concludendo, vorremmo infine ribadire che ciò che viene messo in primo piano in questa ricerca non è un approccio concettuale al compito, ma un approccio cognitivo, che non indaga quali sono i concetti o gli oggetti matematici (assiomi, definizioni, teoremi) che lo studente deve conoscere per poter risolvere un dato problema, ma il modo in cui egli deve imparare a *guardare* e infine *vedere* le figure coinvolte, al fine di essere in grado di assolvere al compito assegnato, e come questo modo di vedere possa nascere dall'interazione tra la costruzione e la dimostrazione. Si tratta dunque di un contributo all'individuazione delle cause che impediscono allo studente di entrare cognitivamente nel compito assegnato nonché della sperimentazione di una modalità di lavoro che consente di indurre lo studente ad adottare il modo di vedere non iconico. Come afferma Gabriele Lolli:

> a seconda di quello che si vede si possono fare alcune cose oppure no, e quindi si può continuare in modo diverso a fare e a ragionare (…) ciò che si fa, e le conclusioni che se ne traggono, dipende da quello che si vede. (Lolli, 1996, p. 135)

La presente ricerca ha mostrato che l'educazione a quel modo di vedere "geometrico" che Duval chiama "non iconico" è possibile e auspicabile già alla scuola primaria e che esso può avvenire, adottando certi accorgimenti, anche con gli strumenti classici della geometria: costruzioni con riga e compasso e relativa dimostrazione.

Ringraziamenti

L'autrice ringrazia le insegnanti Roberta Cuoghi, Tina Triglia, Tina De Falco e i bambini delle loro classi della Scuola Primaria "San Giovanni Bosco" di Sassuolo per la loro disponibilità e collaborazione; un ringraziamento è rivolto anche alla PhD Maura Iori per i consigli tecnici che hanno permesso una revisione critica di alcuni punti dell'articolo.

Riferimenti bibliografici

Aglì, F., D'Amore, B., Martini, A., & Sandri, P. (1997). Attualità dell'ipotesi "intra-, inter-, trans-figurale" di Piaget e Garcia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A*(4), 329–361.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66–72.

Baccaglini Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*(3), 225–253.

Bagni, G. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica: Una prospettiva ermeneutica.* Bologna: Pitagora.

Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini Frank, A. (2015). Geometry in early years: Sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 47*(3), 391–405.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge/Taylor & Francis Group.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *1*(41), 177–182.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

D'Amore, B. (2001). Un contributo sul dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 31–56.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2015). Comentarios a los artículos de Raymond Duval. In R. Duval & A. Saenz Ludlow (Eds.), *Selected Works* (pp. 237–253). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text: Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentali*s, *52*(1–2), 27–58.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 119–162.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). (2011). *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study* (pp. 37–51). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Fujita, T., Jones, K., & Miyazaki, M. (2011). Supporting students to overcome circular arguments in secondary school mathematics: The use of the flowchart proof learning platform. *Proceedings of PME35* (Vol. 2, pp. 353–360). Ankara, Turkey: PME.

Gadamer, H. G. (1960). *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr Siebeck.

Gagatsis, A. (1980). *La transmission de l'information et son application à deux manuels scolaires*. In *Rapports et Diplômes de DEA en Didactique des Mathématiques* (pp. 81–128). Strasbourg IREM: Université Louis Pasteur.

Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique* (Thèse de 3e cycle). Université de Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg, Francia.

Gagatsis, A. (1984). Préalables à une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématique*s, *5*(1), 43–80.

Gagatsis, A. (1985). Questions soulevées par le test de clôture. *Revue Française de Pédagogie*, *70*, 41–50.

Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica, 9*(2)*,* 136–146.

Gagatsis, A., & Chaney, E. (1983). Le test de clôture en classe. *L'ouvert*, *32*, 21–33.

Healy, L., & Powell, A. (2013). Understanding and overcoming 'disadvantage' in learning mathematics. In M. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. -S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 69–100). New York: Springer.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Università degli Studi di Palermo). Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14–26.

Jung, M. (2002). *L'ermeneutica*. Bologna: il Mulino. (Lavoro originale pubblicato nel 2001).

Kane, R. B., Byrne, M. A., & Hater, M. A. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135–137.

Leung, A., Baccaglini Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 439–460.

Lolli, G. (1996). *Capire la matematica*. Bologna: il Mulino.

Mariotti, M. A. (1996). Costruzioni in geometria: Alcune riflessioni. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 19B*(3), 261–288.

Mariotti, M. A. (2015). Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica: Visualizzare in geometria come problema didattico. In G. Anichini, L. M. Giacardi, & E. Luciano (Eds.), *Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica, Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà* [Monografia], *La Matematica nella società e nella cultura*, *8*, 109–142.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational*

Studies in Mathematics, 34(3), 219–248.
Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 181–189.
Owens, K. (2015). *Visuospatial reasoning: An ecocultural perspective for space, geometry and measurement education*. New York: Springer.
Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée chez l'enfant*. Paris: P.U.F.
Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205–236). Rotterdam: Sense Publishers.
Rivera, F. (2011). *Towards a visually-oriented school mathematics classrooms: Research, theory, practice, and issues*. New York: Springer.
Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2017). Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 277–287). Cham: Springer International Publishing.
Teppo, A. R. (1998). Qualitative research methods in mathematics education [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.
Viganò, R. (1999). *Metodi quantitativi nella ricerca educativa*. Milano: Vita e Pensiero.

Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura[1]

Raymond Duval
Professore emerito Université du Littoral Côte d'Opale, Francia

Noi preferiamo il vedere (το οραν) *a tutti gli altri nostri sensi.*
È soprattutto (μαλιστα) *la vista che ci fa conoscere il mondo,*
e che mostra (δηλοι) *una molteplicità di differenze.*
Aristotele, Metafisica, I, 1–9.

Abstract. *The way of seeing geometric figures is a very important topic for mathematics education, especially for the aims of geometry instruction in primary and low secondary school. The crucial issue is the contradictory role in their use for solving problem: both the perceptual obstacle and the heuristic support are cognitively necessary. The comparison between geometric figures and paintings, which are two opposite types of visualization, forces us to wonder whether the seeing process is the same for both kinds of visualisation or whether it is specific to each one. Assuming that seeing a visualization basically consists in recognizing something of what the visualization itself is showing, the comparison between seeing a geometrical figure and seeing a painting leads to four important results concerning visualization education. The first is the necessary distinction between the visual recognition of 2D shapes that may be thought as superimposed on each other and the visual recognition of 2D shapes that may be thought as juxtaposed to each other. Moving quickly from one recognition to the other is the same cognitive process required for using geometrical figures as a heuristic device and for looking carefully at the paintings. The second result is specific for seeing any iconic visualization. It is the necessary distinction between the degrees of iconicity, because the resemblance to what visualization shows changes with painting, drawing, sketching or diagrams. The third is specific for seeing any geometric figure being a non-iconic visualization. The recognition process is the counter-intuitive process of dimensional deconstruction of 2D shapes into 1D or 0D figural units. This process explains how geometric figures semiotically visualize geometric properties or geometric objects. Every geometric property corresponds to a relationship between at least two figural units. The last result is coextensive with the three previous ones. Seeing visualization, whether iconic or non-iconic, always involves something unsaid. It may be an implicit or silent saying to oneself, a word alone, or rather, on the contrary, an explicit written statement. But the relation between seeing and saying is gradually reversed, when moving from paintings to geometric figures. These four results highlight the key*

[1] Questo articolo sviluppa la comunicazione *Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences* fatta in occasione del Convegno internazionale in occasione dei 70 anni di Bruno D'Amore, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 08 10 2016. (Si veda: Duval, 2016).

cognitive factors to be considered as a priority in the didactic transposition of geometry for primary and low secondary school.

Keywords: painting, geometric figure, iconic visualization, non-iconic visualization, degrees of iconicity, 2D shapes, closed outline, figural unit, recognition, seeing, saying.

Sunto. *Le modalità di vedere le figure geometriche costituiscono un argomento molto importante per la didattica della matematica, in particolare per gli obiettivi dell'istruzione geometrica nella scuola primaria e all'inizio della secondaria. La questione cruciale è il ruolo contradditorio del loro uso per risolvere i problemi: sia l'ostacolo percettivo che il supporto euristico sono cognitivamente necessari. Il confronto tra figure geometriche e dipinti, che sono due tipi opposti di visualizzazione, costringe a chiederci se il processo di visione sia lo stesso per entrambi i tipi di visualizzazione o se sia specifico per ciascuno. Partendo dal presupposto che vedere una visualizzazione consiste essenzialmente nel riconoscere qualcosa di ciò che la visualizzazione stessa sta mostrando, il confronto tra vedere una figura geometrica e vedere un dipinto porta a quattro risultati importanti che riguardano l'educazione alla visualizzazione. Il primo è la necessaria distinzione tra il riconoscimento visuale di forme 2D che possono essere pensate come sovrapposte l'una all'altra e il riconoscimento visuale di forme 2D che possono essere pensate come giustapposte l'una all'altra. Passare rapidamente dall'un riconoscimento all'altro è lo stesso processo cognitivo richiesto per usare le figure geometriche come dispositivo euristico e per guardare attentamente i dipinti. Il secondo risultato è specifico per vedere qualsiasi visualizzazione iconica. È la necessaria distinzione tra gradi di iconicità, perché la somiglianza con ciò che mostra la visualizzazione cambia con la pittura, il disegno, lo schizzo o il diagramma. Il terzo è specifico per vedere la figura geometrica quando essa è una visualizzazione non iconica. Il processo di riconoscimento è un processo contro-intuitivo di decostruzione dimensionale di forme 2D in unità figurali 1D o 0D. Questo processo spiega come le figure geometriche visualizzano semioticamente proprietà o oggetti geometrici. Ogni proprietà geometrica corrisponde a una relazione tra almeno due unità figurali. L'ultimo risultato è coestensivo con i tre precedenti. Vedere la visualizzazione, che sia iconica o non iconica, implica sempre qualcosa di non detto. Può essere un detto implicito o muto, rivolto a sé stessi, anche solo una parola, o piuttosto al contrario una dichiarazione esplicita scritta. Ma la relazione tra vedere e dire è gradualmente invertita passando dai dipinti alle figure geometriche. Questi quattro risultati evidenziano i fattori cognitivi chiave da prendere in considerazione, come una priorità, nell'organizzazione della trasposizione didattica della geometria per la scuola primaria e l'inizio della secondaria.*

Parole chiave: pittura, figura geometrica, visualizzazione iconica, visualizzazione non-iconica, gradi di iconicità, forme 2D, contorno chiuso, unità figurale, ricognizione, vedere, dire.

Resumen. *La forma de ver las figuras geométricas es un tema muy importante para la educación matemática, especialmente para los objetivos de la enseñanza de la* *geometría en la escuela primaria y al inicio de la escuela secundaria. La cuestión crucial es su papel contradictorio relativo a su uso para resolver problemas: se necesitan cognitivamente tanto del obstáculo perceptual como del apoyo heurístico. La comparación entre figuras geométricas y pinturas, que son dos tipos opuestos de visualización, nos obliga a preguntarnos si el proceso de observación es el mismo para ambos tipos o si es específico para cada uno. Asumiendo que "ver" una visualización básicamente consiste en reconocer algo de lo que muestra la visualización misma, la comparación entre ver una figura geométrica y ver una pintura conduce a cuatro resultados importantes para la formación en el ver la visualización. La primera es la distinción necesaria entre el reconocimiento visual de las formas 2D que se pueden considerar superpuestas entre sí y el reconocimiento visual de las formas 2D que se pueden considerar yuxtapuestas entre sí. Pasar rápidamente de un reconocimiento a otro es el mismo proceso cognitivo que se requiere tanto cuando se usan figuras geométricas como dispositivo heurístico como cuando se miran cuidadosamente las pinturas. El segundo es específico para ver cualquier visualización icónica. Es la distinción necesaria entre los grados de iconicidad, porque el parecido con lo que muestra la visualización cambia con la pintura, el dibujo, el boceto o el diagrama. El tercero es específico para ver cualquier figura geométrica que sea una visualización no icónica. El proceso de reconocimiento es el proceso contrario a la intuición de la deconstrucción dimensional de formas bidimensionales en unidades figurativas 1D o 0D. Este proceso explica cómo las figuras geométricas visualizan semióticamente propiedades u objetos geométricos. Cada propiedad geométrica corresponde a una relación entre por lo menos dos unidades figúrales. El último resultado es co-extensivo con los tres anteriores. Ver la visualización, ya sea icónica o no icónica, siempre implica algo no dicho. Puede ser un decir implícito o silencioso para sí mismo, solo una palabra, o más bien lo contrario, hasta una redacción explícita. Pero la relación entre ver y decir se invierte gradualmente de las pinturas a las figuras geométricas. Estos cuatro resultados destacan los factores cognitivos clave que se deben tener en cuenta, como prioridad, en la organización de la transposición didáctica de la geometría para la escuela primaria y el inicio de la escuela secundaria.*

Palabras clave: pintura, figura geométrica, visualización icónica, visualización no icónica, grados de iconicidad, formas 2D, perfil cerrado, unidad figurativa, reconocimiento, ver, decir.

1. Premessa: considerazioni preliminari

Tanto in geometria elementare quanto in pittura, bisogna abbandonare la nozione di "spazio" perché è una nozione equivoca. Questo almeno per cogliere i processi cognitivi di esplorazione e composizione in questi due domini nei quali la vista è essenziale, e dove bisogna "vedere" *con i propri occhi, anzi, soprattutto con i propri occhi*. Ed è questa esigenza cognitiva di "vedere" che guida l’uso euristico delle "figure geometriche" nella risoluzione dei problemi. Alla nozione equivoca di spazio, bisogna sostituire quella di *unità figurale di dimensione nD/mD*, nella quale il numeratore indica il numero di dimensioni di *quel che è dato a vedere* (3D, 2D, 1D o 0D) e il denominatore il numero di dimensioni *nel quale si vede* quel che è dato a vedere, dunque solo 2D o 3D.

La nozione di unità figurale nD/mD è necessaria per non confondere tutti i problemi epistemologici, cognitivi e didattici che sono posti dal rapporto paradossale fra matematica e realtà. Infatti, fra matematica e realtà c'è un divario "ontologico" profondo, e tuttavia la matematica si rivela necessaria per la conoscenza, allo stesso tempo teorica e pratica, della realtà. Questo divario ontologico è quello che separa e allontana la percezione diretta degli oggetti 3D/3D da tutte le rappresentazioni visuali 2D/2D o 3D/2D intenzionalmente prodotte su una superficie materiale, o dematerializzate come avviene sullo schermo di un computer. Noi chiameremo *visualizzazione* tutte le rappresentazioni visuali intenzionalmente prodotte, da non confondere con i fenomeni fisici e ottici di riflessione e di immagine. Infatti, *non c'è nulla in comune fra il "vedere" percettivamente gli oggetti stessi, o i loro riflessi, e il "vedere" solo le immagini, i disegni, gli schemi o le figure che ne vengono fatti in un processo di costruzione o di creazione*. Contrariamente al principio fenomenologico citato sopra, le differenze che mostrano le rappresentazioni visuali sono estremamente ridotte rispetto all'inesauribile molteplicità sensibile che la vista fa scoprire (Aristotele, *Metafisica*, A, 980a, 25–27) (Reale, 2000). L'ostacolo contro il quale si scontra l'introduzione della geometria elementare in primaria e in secondaria proviene da questo divario ontologico e cognitivo fra questi due modi di vedere, che nulla hanno in comune fra loro. Tale ostacolo non si presenta nello stesso modo per gli insegnanti (o per i didatti) e per gli allievi. Per gli insegnanti, la questione cruciale è: In che modo gli allievi possono passare dalla percezione 3D/3D alla comprensione matematica delle "figure geometriche"? Per gli allievi, la questione cruciale è tutt'altra: Come sapere quale proprietà o quale formula usare a partire da una "figura geometrica" della quale si dice che modellizza una situazione di realtà?

La "relazione fra quei due mondi possibili" che sono l'arte e la matematica offre un approccio intuitivo alla complessità cognitiva delle due questioni sopra riportate.[2] Se ci si attiene alla geometria e alle rappresentazioni pittoriche, *questi due mondi hanno questo in comune, che essi visualizzano*, ciascuno a modo suo, *le organizzazioni possibili di forme diverse*, quelle che si trovano nella realtà e *quelle che non vi si trovano ma che contribuiscono ad allargarne il campo*. Ma, per mettere in evidenza questa relazione, non serve a nulla mettere in parallelo un quadro e la conoscenza matematica della quale esso sembra essere un'applicazione, né sovrapporre una figura geometrica all'immagine della situazione reale che essa modellizza. Queste sono le pratiche che si trovano più o meno frequentemente nei manuali scolastici. La

[2] Parafrasiamo qui il sottotitolo dell'opera di D'Amore (2015), che propone una reale sintesi su questa questione: *identità tra due mondi possibili*.

relazione si situa non in quel che è costruito, composto, illustrato o mostrato, ma in quell’atto cognitivo fondamentale che è il modo di “vedere”, cioè nello sguardo, dato che lo sguardo può riconoscere o non riconoscere ciò che è dato a vedere. E qui siamo al confine di *un altro divario cognitivo*, *quello fra conoscere e riconoscere*.

“Vedere” è un atto che richiede *al primo colpo d’occhio* due tipi di riconoscimento:

- il riconoscimento visuale delle forme che sono date a vedere;
- il riconoscimento cognitivo degli “oggetti” che le forme visualmente riconosciute rappresentano.

Nella percezione degli oggetti 3D/3D questi due tipi di riconoscimento non sono quasi mai distinti, perché sono simultanei. Non capita lo stesso nella visualizzazione, cioè in tutte le rappresentazioni piane 2D/2D e 3D/2D. Questi due tipi di riconoscimento restano disgiunti, anche quando quel che è disegnato o dipinto “assomiglia” a quel che è rappresentato. Può trascorrere un lasso di tempo più o meno lungo fra i due riconoscimenti, in quanto essi non dipendono dagli stessi processi semio-cognitivi.

Per mettere in evidenza la complessità di questi processi di riconoscimento in geometria, cerchiamo di paragonare il funzionamento semio-cognitivo della visualizzazione geometrica con quello della visualizzazione pittorica. Questo paragone si baserà sui quattro punti seguenti:

I. I due principi del riconoscimento visuale delle forme e i gradi di libertà dello sguardo, che sono essenzialmente gli stessi per la visualizzazione geometrica e la composizione pittorica.
II. I tre tipi di riconoscimento cognitivo delle forme. Ogni sguardo su una visualizzazione, sia essa geometrica o pittorica, implica una verbalizzazione silenziosa. La divergenza fra le figure geometriche e i quadri dipinti inizia con il dire se viene o no esplicitata questa verbalizzazione silenziosa. Il distacco richiesto dal modo matematico di vedere comincia con la decostruzione dimensionale delle forme.
III. La conquista della visualizzazione: costruire o comporre forme 2D/2D per vedere in 3D/2D gli oggetti rappresentati. Ovviamente, questo è il punto che ha attirato maggiormente la nostra attenzione, in quanto costituisce una soglia sia nello sviluppo della geometria, sia nella storia dell’arte. Infatti, è il punto d’incrocio fra sguardo, percezione, ottica e visualizzazione geometrica. Ma quel che ha attirato meno attenzione finora è il fatto che esso ha paradossalmente imposto una completa opposizione fra il riconoscimento cognitivo delle forme e le grandezze stimate o misurate.
IV. Lo sguardo nel lavoro matematico e nei due registri di visualizzazione. Non si può parlare di visualizzazione geometrica, senza paragonarla a un altro tipo di visualizzazione matematica che ha progressivamente finito con il soppiantarla, cioè la visualizzazione analitico-grafica.

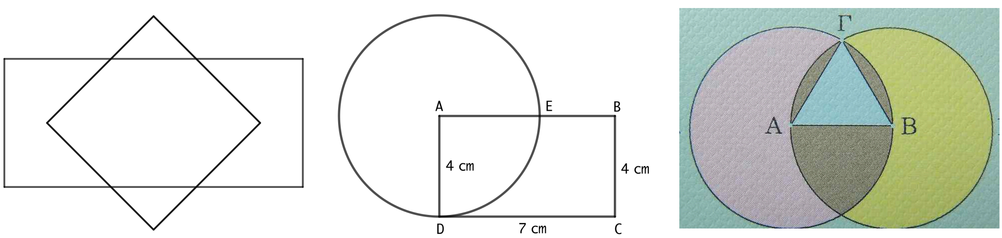
Potremo allora ritornare all'ostacolo con il quale si scontra l'introduzione della geometria elementare in primaria e in secondaria e sulle due questioni cruciali che esso pone.

Quali conseguenze didattiche per l'insegnamento della geometria elementare?

2. I due principi del riconoscimento visuale delle forme e i gradi di libertà dello sguardo

Per partire, diciamo subito che una forma è un *contorno chiuso*, cioè un'*unità figurale 2D/2D* che si distingue da uno sfondo che ovviamente non deve essere confuso con il supporto materiale della rappresentazione. Questo contorno chiuso può distaccarsi in due modi, sia come una macchia scura o luminosa su uno sfondo chiaro o su uno sfondo scuro, *e allora la forma è data dai bordi della macchia*, sia attraverso linee tracciate intenzionalmente, e allora la forma è data dal contorno tracciato.

Questa definizione è evidentemente insufficiente, in quanto essa non permette né di porre, né di comprendere il problema del riconoscimento visuale delle forme che è al centro di tutto. Questo problema si pone *quando una rappresentazione visuale contiene almeno due forme*, come nei tre esempi che seguono, ed essa non è ridotta a una sola forma come nelle rappresentazioni che illustrano le definizioni di figure geometriche elementari (triangolo, quadrilatero convesso, cerchio ecc.). Questa situazione è la sola a essere importante per il problema del riconoscimento visuale delle forme in geometria. Anche per non confonderla con le forme isolate che illustrano le definizioni, noi parleremo di "configurazione" e non di "figura geometrica".



A. Configurazione non codificata.

B. Configurazione doppiamente codificata (lettere e misure).

C. Configurazione codificata.

Figura 1. Tre configurazioni costruibili strumentalmente.

La sola differenza fra queste tre figure riguarda il codice che consiste in segni (lettere, cifre o simboli) che vengono aggiunti alle forme, letti e non solo guardati. La configurazione A non è codificata, la configurazione B è doppiamente codificata. Ora, *una codificazione si legge ma non si guarda in quanto essa non dà nulla da vedere o da riconoscere*. Le forme, al contrario, sono riconosciute immediatamente, con un solo colpo d’occhio, nella loro totalità. Esse si guardano. È dunque essenziale separare bene ciò che rientra nella codifica da ciò che rientra nel riconoscimento delle forme. Queste sono due variabili semio-cognitive tra loro indipendenti.

Due principi determinano i gradi di libertà nel riconoscimento visuale delle forme in tutte le rappresentazioni 2D/2D o 2D/3D in geometria elementare e in pittura.

Il primo principio è lo stesso formulato dalla *Gestalttheorie*; esso concerne il riconoscimento visuale (R.V.) sia di una forma isolata sia di forme associate ad altre simili o diverse:

R.V.1 *Il rapporto figura/sfondo che si impone immediatamente allo sguardo è percettivamente stabile. Esso non è spontaneamente invertibile.*

Questo fatto può essere facilmente verificato per le forme isolate su uno sfondo omogeneo. Per poter invertire questo rapporto, bisogna ricorrere al colore o per la parte interna del contorno chiuso o per la parte esterna. Ma questo si verifica anche quando c’è una sovrapposizione parziale di due forme o quando l’una è inscritta nell’altra. L’interesse di questo principio è nella sua conseguenza:

R.V.1' *Il riconoscimento visuale di forme 2D si fa in opposizione a quello di altre forme possibili che restano sullo sfondo e che sono dunque visualmente nascoste.*

Per poter vedere anche queste altre forme, bisogna esercitare lo sguardo a invertire il rapporto figura/sfondo che s’impone immediatamente allo sguardo.

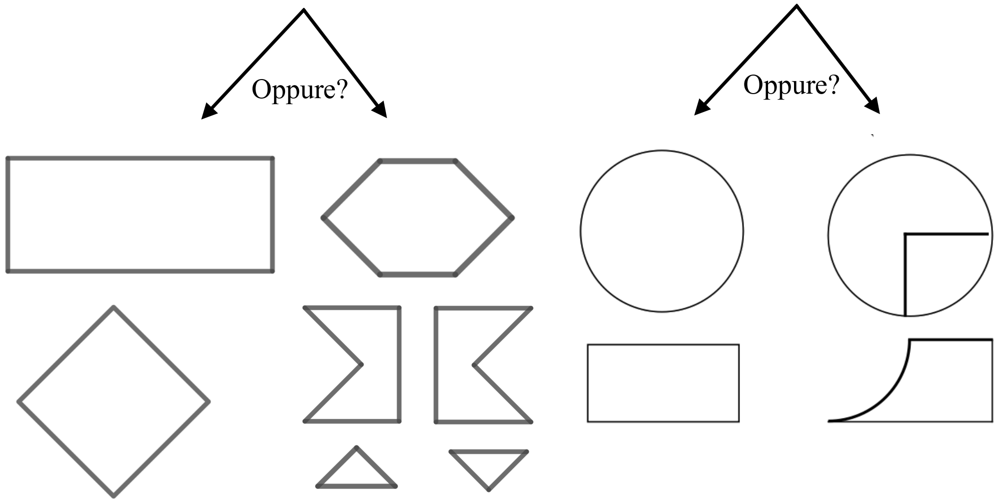
Il secondo principio è necessario per comprendere l’uso euristico delle figure in geometria elementare. In una rete di linee tracciate, ci sono tante forme quanti sono i contorni chiusi possibili. È quindi necessario distinguere due tipi di contorni chiusi:

- quelli che si giustappongono come in un pavimento, regolare o irregolare, e che costituiranno lo sfondo della figura;
- quelli che si sovrappongono e che si impongono al riconoscimento visuale secondo le leggi gestaltiche della percezione delle forme, nascondendo in tal modo le forme giustapposte.

Da qui il secondo principio del riconoscimento visuale:

R.V.2 *In una configurazione, non tutti i contorni chiusi possono essere visti contemporaneamente o l’uno in alternativa all’altro. Le forme che s’impongono immediatamente allo sguardo come sovrapposte l’una all’altra impediscono il* *riconoscimento visuale di quelle che sono giustapposte. Il tipo di riconoscimento che s'impone a prima vista occulta l'altro*.

Ci sono quindi due diverse modalità (Figura 2) di vedere le configurazioni A e B che appaiono sopra (Figura 1), anche se la sovrapposizione di due forme è quella che si impone immediatamente allo sguardo, in modo così ovvio che occulta quella per giustapposizione.



2 forme sovrapposte oppure
5 forme giustapposte

2 forme sovrapposte oppure
3 forme giustapposte con il quarto di cerchio

Figura 2. Due sguardi diversi su una stessa configurazione.

Nella configurazione C della Figura 1, i due modi di vedere dipendono da ciò che viene riconosciuto come sfondo della configurazione (R.V.1): o i due cerchi parzialmente sovrapposti sono presi come sfondo, e la figura è allora il triangolo ΑΒΓ; o, al contrario, il rettangolo intero viene preso come sfondo, e la figura è allora la sovrapposizione parziale di due cerchi nei quali i segmenti ΑΒ, ΒΓ e ΑΓ sono tre raggi dei due cerchi (Duval, 2015, p. 155). Possiamo quindi formulare la condizione cognitiva necessaria per l'uso euristico di una configurazione costruita strumentalmente:

R.V.2' *Affinché una configurazione svolga un ruolo euristico nella risoluzione di un problema, è necessario essere in grado di* riconoscere tutti i contorni chiusi possibili*, quelli riconosciuti per sovrapposizione e quelli riconosciuti per giustapposizione*.

Senza l'acquisizione di questa capacità che va contro l'evidenza percettiva immediata, lo sguardo rimane cieco di fronte a qualsiasi configurazione per risolvere i problemi di geometria elementare.

Questo principio mostra evidentemente solo prerequisiti cognitivi e innaturali per l’uso euristico delle configurazioni. Ma, per descrivere il processo euristico stesso, esso deve essere riformulato in termini di operazioni da eseguire, le quali spesso portano ad arricchire la configurazione iniziale tracciando nuove linee:

R.V.2" *Qualsiasi figura o qualsiasi contorno di una data configurazione è scomponibile in diversi contorni chiusi, della stessa forma o di forme diverse. I nuovi contorni ottenuti, simili ai pezzi di un puzzle, possono essere ricombinati per ottenere una configurazione diversa da quella di partenza.*

Così un quadrato può essere scomposto in quattro quadrati, che possono poi essere riconfigurati in un rettangolo. Oppure può essere suddiviso in due triangoli, che possono essere riconfigurati in un mezzo quadrato la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale (Platone, *Menone*, 83 a-d) (Bonazzi, 2010). Un parallelogramma può essere scomposto in un triangolo e un trapezio rettangolo, i quali possono essere riconfigurati in un rettangolo e così via. Questo tipo di decomposizione, che altrove abbiamo chiamato “mereologico”, è alla base di molte dimostrazioni puramente figurali del teorema di Pitagora (Duval, 1995b, p. 152).

In geometria elementare R.V.1' e R.V.2" sono i due approcci euristici fondamentali per la risoluzione di problemi, *indipendentemente da ogni ipotesi data* (Padilla Sanchez, 1992).

In arte, R.V.1 è particolarmente importante nelle rappresentazioni figurative, perché consente la distinzione tra le diverse profondità di piano, privilegiando il riconoscimento per sovrapposizione rispetto a qualsiasi riconoscimento per giustapposizione. Nelle rappresentazioni non figurative, invece, R.V.2 può risultare fondamentale.

Prendiamo come esempio i due mosaici del I secolo, scoperti a Saint-Romain-en-Gal (Museo Gallo-Romano di Saint-Romain-en-Gal, Vienna) (A e C in Figura 3).

A. Apprensione visiva locale.

B. Apprensione visiva globale.

C. Un effetto *moiré* (di distorsione) di forme ondeggianti a partire da una configurazione elicoidale. L'apprensione locale si fonda sulla continuità dell'apprensione globale.

Figura 3. Due mosaici.

Nei mosaici A e B si giustappongono tre tipi di contorni chiusi di *rombi e quadrati dello stesso colore scuro*, i cui rispettivi lati sono separati da *strisce bianche*. Il contrasto dei colori introduce una variazione nel rapporto figura/sfondo come per il mosaico C. Che cosa si impone allo sguardo? Per rispondere a questa domanda, non è sufficiente prendere in considerazione la relazione tra la figura e lo sfondo, occorre anche prendere in considerazione il focus dello sguardo che può rimanere legato all'apprensione locale (A) o globale (B), oppure passare dall'una all'altra.

Per quanto concerne l'apprensione locale, sono immediatamente riconoscibili tre tipi di contorni chiusi, in funzione delle variazioni di visibilità che R.V.1 consente:

- i quadrati scuri non possono essere visti senza i quadrati bianchi con i quali formano una configurazione elementare che si distingue dallo sfondo dell'intero mosaico;
- i rombi scuri possono essere riconosciuti separatamente ma il loro riconoscimento cambia a seconda dello sfondo al quale sono rapportati; essi appaiono come rombi in relazione allo sfondo bianco dal quale si

distinguono; ma, rispetto ai due quadrati vicini al di sopra e al di sotto, essi appaiono come dei quadrati, dando così l’illusione di gradini di una scala.

Nell’apprensione globale, lo sguardo introduce una prospettiva sulla rappresentazione visuale 2D/3D, che è il mosaico. Altri due tipi di contorno chiuso appaiono secondo lo stesso principio del riconoscimento visuale:

- configurazioni di quattro quadrati che circondano un rombo; queste configurazioni sembrano essere sovrapposte per l’alternarsi di orientamento dei rombi;
- configurazioni decagonali il cui profilo chiuso è tratteggiato da bordi bianchi; esse giustappongono le configurazioni elementari e i rombi visualmente riconosciuti nell’apprensione locale (4 quadrati, 3 rombi e 2 mezzi rombi).

Esistono cinque tipi di contorni chiusi riconoscibili. Ma il riconoscimento di alcuni potrebbe escludere quello di altri (R.V.1’). Questo ci permette di identificare una prima relazione tra il modo matematico di vedere una figura in geometria per usarla euristicamente, e il modo di vedere in pittura per scoprire la sua composizione e il suo potere di visualizzazione o evocazione. *Deve essere possibile esplorare e riconoscere tutti i contorni chiusi possibili che l’immagine contiene* (R.V.2’). In questo esempio, il riconoscimento *visuale* per sovrapposizione non interviene. Ma si possono facilmente trovare rappresentazioni nelle quali esso riveste un ruolo importante.

Il mosaico C è realizzato secondo lo stesso principio di giustapposizione dei contorni chiusi. La prima differenza riguarda la riduzione dei contorni chiusi giustapposti a un singolo tipo: triangoli che si distinguono solo per il loro colore. La seconda differenza riguarda una giustapposizione circolare, la dimensione dei triangoli che diminuisce regolarmente al diminuire della loro distanza dal centro. Ciò porta non solo a neutralizzare ogni distinzione tra figura e sfondo, ma anche a fondere ogni apprensione locale in un’apprensione globale. *Ciò che viene allora riconosciuto sono delle linee curve* che interferiscono come un moiré di forme ondulate da una configurazione elicoidale di quattro uccelli.

3. I tre tipi di riconoscimento cognitivo di quel che le forme rappresentano

Il riconoscimento di ciò che rappresentano le forme visualmente riconosciute rivela tre tipi di operazioni cognitive che sono indipendenti dal riconoscimento visuale delle forme.

3.1. Il riconoscimento iconico

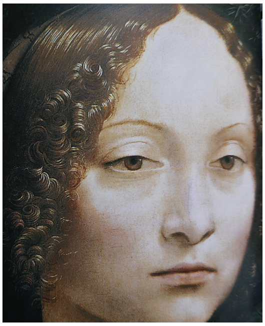
Questa operazione sembra così immediata e soprattutto così evidente da essere spesso confusa con il riconoscimento visuale della forma disegnata o costruita.

La si spiega attraverso la "somiglianza" tra la forma del contorno chiuso e quella dell'oggetto rappresentato. Ma la nozione di "somiglianza" è una nozione vaga. E spesso può essere difficile da riconoscere quando si tratta di oggetti reali. Le rappresentazioni 2D/2D o 3D/2D di oggetti reali (3D/3D) possono variare completamente, a seconda del punto dal quale vediamo l'oggetto che esse rappresentano: da vicino, da lontano, dal basso, dall'alto, dal davanti, di profilo, da dietro ecc. Così, per uno stesso oggetto, c'è una molteplicità di forme possibili. Da qui l'illusione di figure che sarebbero forme tipiche. Come possiamo riconoscere che un'immagine o un disegno assomiglia all'oggetto che rappresenta?

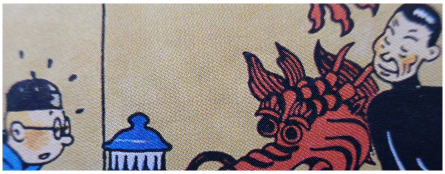
Bresson (1987) ha proposto una definizione di riconoscimento cognitivo (RC) e non più solo visuale di una configurazione 2D/2D. Essa parte dal principio che non sia sufficiente limitarsi alla sola congruenza tra il contorno chiuso globale della configurazione e il contorno dell'oggetto rappresentato; occorre anche tenere conto degli elementi potenzialmente presenti all'interno del contorno chiuso.

R.C.1 *Un'immagine, un disegno o uno schizzo assomigliano all'oggetto che essi rappresentano quando le relazioni di vicinanza tra gli elementi della configurazione conservano le relazioni di vicinanza tra gli elementi o le parti dell'oggetto rappresentato*.

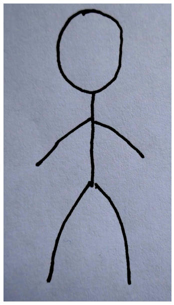
L'interesse di questa definizione è che essa consente di distinguere *tre gradi di iconicità*, come si può osservare nelle tre sottostanti rappresentazioni visuali di un volto (Duval, 2016).



A. Rappresentazione figurativa: Ritratto di Ginevra di Benci (Leonardo da Vinci, 1474?, tempera e olio su tavola, 38,8×36,7 cm, National Gallery of Art, Washington).



B. Rappresentazione schematica: volto di profilo e volto di fronte. (Remi, 1936, in bianco e nero; Remi, 1946, in colore).



C. Rappresentazione simbolica.

Figura 4. Gradi di iconicità nel riconoscimento visivo di un volto.

La *rappresentazione figurativa* (A) conserva:

- la somiglianza del contorno chiuso globale;
- le relazioni di vicinanza tra le parti caratteristiche di un volto;
- la somiglianza figurativa di ogni parte del volto (gli occhi, il naso, la bocca ecc.).

La *rappresentazione schematica* (B) conserva:

- la somiglianza del contorno chiuso globale;
- le relazioni di vicinanza tra le parti caratteristiche di un volto.

(Le parti dei volti, ridotte a dei tratti, hanno perso qualsiasi somiglianza figurativa propria).

La *rappresentazione simbolica* (C) conserva solo:

- la somiglianza del contorno chiuso.

Questo contorno rappresenta una testa o un volto nella misura in cui le relazioni di vicinanza tra gli elementi della configurazione conservano quelle tra le parti del corpo. Si ottengono così dei *simboli iconici* che consentono una comunicazione immediata ed economica, come in certi segnali stradali, o per codificare informazioni su una figura geometrica.

Si possono osservare nella storia della pittura molti tentativi di ricorrere a questi diversi gradi di iconicità che vanno da una somiglianza perfetta di certi ritratti e di certe nature morte con i volti, i fiori, i frutti, le cose che si possono vedere nella realtà, fino all’astrazione totale di una sensazione pura, ridotta a quella di uno o più colori. Il confronto tra i due quadri seguenti permette di osservare degli intermediari tra due dei tre gradi di libertà che abbiamo appena elencato.

Sopra Vitebsk, di M. Chagall, 1914.

Nudo blu III, di H. Matisse, 1952.

Figura 5. Rappresentazione figurativa onirica e schematizzazione simbolica.

Nel quadro di Chagall tutte le forme giustapposte sono iconiche, ma i loro rapporti di vicinanza non conservano la verosimiglianza di relazioni di vicinanza della realtà. Nel collage di Matisse, al contrario, nessuna delle forme giustapposte è visivamente perfettamente iconica di per sé, ma i loro rapporti di vicinanza compongono la sagoma di un corpo femminile.

Infine, c'è un tipo di rappresentazione iconica che è stata esplorata dal cubismo. Consiste nel *giustapporre delle rappresentazioni schematiche* che sono cognitivamente incompatibili perché associano *differenti punti di vista sullo stesso soggetto*. Ad esempio, parti di un volto viste frontalmente con altre viste di profilo come nei ritratti di Dora Maar o di D'Ambroise Vollard, di Picasso, o parti di uno scorcio di paesaggio come nel dipinto di Braque, *Le viaduc à l'Estaque*.

Figura 6. Ritratto di Dora Maar, di P. Picasso, 1937, Museo Picasso, Parigi, olio su tela, 92×65 cm.

Figura 7. Ritratto di Ambroise Vollard, di P. Picasso, 1909–1910, Museo Puškin, Mosca, olio su tela, 92×65 cm.

In geometria, le uniche rappresentazioni iconiche utili sono limitate alle rappresentazioni schematiche (B). Il ruolo di queste rappresentazioni, che non devono essere confuse con le "figure geometriche", è quello di modellizzare le situazioni reali per renderle visualmente congruenti con la "figura geometrica" che corrisponde al teorema da applicare (Duval, 2015, Figure 13 e 14, pp. 172–173). Ma, per adempiere a questo ruolo di modellizzazione, le rappresentazioni schematiche devono solo:

- conservare la configurazione dei componenti di una situazione reale;
- far sì che i rapporti tra gli elementi della situazione, ridotti a punti, non si limitino solo alle relazioni di vicinanza, ma tengano conto dell'orientamento delle distanze che li separano.

Qualsiasi cosa che potrebbe rientrare in una rappresentazione figurativa per mantenere la somiglianza con una situazione concreta è o rumore o distrattore.

3.2. Il riconoscimento discorsivo: dalla verbalizzazione silenziosa all'interpretazione o agli enunciati

C'è un'inter-penetrazione cognitiva di immagini e linguaggio, o più esattamente dello sguardo, del "dire" o del "dirlo a sé stessi". Le immagini parlano o richiamano parole, perché non c'è immagine senza linguaggio. Viceversa, la comprensione del linguaggio richiede la possibilità di vedere o "mostrare" ciò che è detto e, non riuscendo a vederlo, la possibilità di visualizzarlo, cioè di rappresentarlo visualmente. C'è bisogno di nominare ciò che si vede per "identificarlo". Ma questa inter-penetrazione avviene a livelli molto diversi di verbalizzazione, in quanto la relazione di predominanza tra lo sguardo e il “dire” può essere invertita fino all’assorbimento apparente dell’uno da parte dell’altro (Duval, 2014, pp. 244–245).

Qualsiasi riconoscimento iconico, comprese le rappresentazioni figurative, implica un riconoscimento discorsivo, che abbiamo chiamato *verbalizzazione silenziosa*. Questa verbalizzazione implicita consiste in un processo di doppia associazione:

[(un’immagine e una parola) e (una parola e un’altra parola)].[3]

È questo monologo interiore che James Joyce o Virginia Woolf hanno cercato di cogliere, oppure è questo linguaggio interiore, rivolto a sé stessi, che programma l’attività intenzionale a breve termine e che ne scandisce lo sviluppo. In questo senso, il linguaggio non segue l’azione, ma l’accompagna come suo controllo interno. Allo stesso modo, questa verbalizzazione è alla base di tutti i riconoscimenti iconici come un’eco dell’identificazione cognitiva di ciò che le forme visualmente riconosciute rappresentano. La mancata conoscenza di questa verbalizzazione cognitiva dà luogo all’illusione di un pensiero senza linguaggio e all’ipotesi di situazione di vicolo cieco dei processi a-semiotici per la formazione dei concetti.

Quasi sempre, quando parliamo di verbalizzazione, ci riferiamo alla verbalizzazione orale, vale a dire esplicita. Questa verbalizzazione spontanea, che riprende la verbalizzazione silenziosa, come ha mostrato Vygotskij, è tanto per sé stessi quanto per chi ascolta, o per colui al quale essa sembra rivolgersi. È *una verbalizzazione orale après coup*, *a posteriori*, successiva, per nominare o caratterizzare, nel contesto di uno scambio o di una comunicazione, l’attività che è stata appena compiuta.

Le parole associate alle immagini, ai disegni e alle figure che sono costruite strumentalmente, per dire ciò che esse rappresentano, rientrano in questa verbalizzazione orale a posteriori ma con un cambiamento importante: l’associazione non è più un’associazione spontanea che riprende la verbalizzazione silenziosa, ma *un’operazione discorsiva di designazione verbale* dell’oggetto visualmente rappresentato. E con questa operazione discorsiva, il rapporto di predominanza tra ciò che si riconosce visualmente e ciò che la verbalizzazione designa è totalmente invertito. L’operazione di denominazione può anche avvenire a dispetto di un riconoscimento figurativo visuale evidente.

Il celebre quadro che giustappone la rappresentazione figurale di una bellissima pipa e la frase “questa non è una pipa” (D’Amore, 2010, p. 493) illustra l’importanza di tale operazione di designazione verbale in relazione al riconoscimento percettivo immediato. Infatti la sua forza è non di “dire” che

---

[3] Freud, nel *Die Traumdeutung* (1899) (*L’interpretazione dei sogni*) ha fatto di questo processo di doppia associazione il principio della produzione di immagini oniriche e la chiave dalla loro interpretazione. Le parole sottendono le immagini.

cosa rappresenta il disegno, *ma di contraddire la verbalizzazione silenziosa che sta alla base del riconoscimento iconico*. Infatti, per chi non avesse mai visto una pipa, questo quadro sarebbe paradossale?

Lo stesso si può dire in geometria elementare per il rapporto tra le figure costruite strumentalmente e le ipotesi. Per una stessa configurazione costruita, si possono scegliere ipotesi diverse e quindi modificare il modo matematico di guardare la stessa configurazione. Gli esercizi e i problemi di geometria che si danno agli studenti a scuola sono tutti basati su questa possibilità di scelta.

Tuttavia, in geometria elementare, la designazione verbale è un'operazione cognitiva molto più complessa che nella pittura. E questo per due motivi. Il primo è che *le parole usate per l'operazione di designazione sono la condensazione di definizioni o di teoremi*, cioè enunciati la cui struttura interna è quella di un'implicazione o di un'equivalenza. Il secondo deriva dal fatto che è necessario *ricorrere a una codifica intermedia di certe unità figurali mediante lettere* per stabilire un ponte tra la configurazione e il vocabolario geometrico utilizzato. Le lettere appartengono agli enunciati e non alla configurazione di unità figurali 0D, 1D o 2D, cioè a "tre diversi sistemi di cose" che si distinguono solo per il loro numero di dimensioni e che possono essere designate solo da lettere, come Hilbert ha sottolineato nelle prime righe delle *Grundlagen der Geometry* (Duval, 1995a, pp. 282–284). In questo senso, Hilbert aveva semioticamente ragione, ma cognitivamente torto![4]

> *R.C.2 Il riconoscimento discorsivo dipende da un'operazione discorsiva di designazione. Questa operazione è indipendente dalla verbalizzazione silenziosa che ogni riconoscimento iconico comporta, e può perfino opporsi a questo riconoscimento.*

Ma quale può essere l'impatto cognitivo delle operazioni discorsive di designazione sulla verbalizzazione silenziosa? Tutta la questione sta nel sapere se questa operazione discorsiva neutralizza la verbalizzazione silenziosa, o addirittura può modificarla. Infatti questa continua a imporsi con il riconoscimento iconico delle rappresentazioni visuali e continua a controllare la verbalizzazione orale spontanea. Ed è qui che il riconoscimento discorsivo in pittura e il riconoscimento discorsivo in matematica iniziano a divergere.

Prendiamo il titolo del collage di Matisse *Nudo blu* (Figura 5). Le componenti di questo collage possono essere interpretate come rappresentazioni iconiche solo schematiche, appena accennate, di una figura

---

[4] Questo errore, accecante per gli studenti di scuola primaria o di scuola secondaria, apparve alla fine degli anni '60 con la riforma della cosiddetta "matematica moderna" che escludeva la visualizzazione delle figure nell'insegnamento della geometria nei corsi scolastici. Di fronte ai suoi effetti disastrosi, è stato necessario reintrodurre la visualizzazione geometrica. Sono state quindi sviluppate attività di trasmissione di messaggi per la costruzione di figure ed è nato il primo software di costruzione di figure, *Cabri*. Ma tutte queste attività di costruzione sono sufficienti?

femminile, ma solo se si vedono nel loro contesto finale. La designazione rinvia a un gioco di associazioni verbali che probabilmente hanno guidato il lavoro di creazione e che costituiscono il potere evocatore di questi collage. La donna, che i pezzi blu fanno risalire da uno sfondo bianco, è nuda come la Venere nel quadro di Botticelli (D'Amore, 2015, p. 229). Lo sfondo bianco è costituito dalle nuvole, i pezzi blu appaiono come spazi vuoti nel cielo … È un sogno a occhi aperti di piena estate, una visione dell'alba o un annuncio di primavera?

In geometria, le ipotesi che "dicono" che cosa rappresenta la configurazione costruita sono formulate mediante parole che sono la condensazione verbale di definizioni e teoremi, *vale a dire enunciati la cui struttura interna è l'implicazione operatoria*:

"condizioni da verificare una a una ⇒ conclusione da evidenziare per il passaggio successivo".

Questo è il livello più alto possibile di verbalizzazione, quello che costituisce i processi di ragionamento specifici delle dimostrazioni. Esso è in opposizione non solo con ogni rappresentazione iconica, ma anche con tutti gli altri tipi di produzioni discorsive che sono legate al linguaggio e mobilitano più o meno il processo cognitivo delle associazioni verbali: la descrizione, la spiegazione, l'interpretazione o l'argomentazione, e tutto ciò che rientra nel discorso. La verbalizzazione delle dimostrazioni in geometria annulla così sia la verbalizzazione silenziosa quanto la verbalizzazione orale a posteriori. Ma questa verbalizzazione autosufficiente e creatrice di conoscenza implica due cose: la presa di coscienza del suo modo cognitivo di funzionamento che è stranamente estraneo a ogni discorso, e un corpus di assiomi che sono coerenti. In altre parole, l'operazione di designazione verbale in geometria è un'operazione complessa, specifica, che si allontana da tutte le pratiche del linguaggio.

R.C.2' Il riconoscimento discorsivo, in geometria, dipende da un'operazione discorsiva di designazione che si limita alla distinzione di unità figurali che differiscono solo per il loro numero di dimensioni e che si basa sulle possibili relazioni tra le unità figurali.

Continuiamo a ripetere che in geometria le figure si guardano e si utilizzano in funzione delle ipotesi e che di conseguenza le figure sono figure codificate. È vero. Ma, anche ripetendolo, si resta su osservazioni superficiali, e non si compiono passi avanti sulle questioni relative all'insegnamento della geometria. *Infatti non dobbiamo confondere le operazioni discorsive di designazione* di ciò che è rappresentato geometricamente *con il contenuto delle ipotesi scelte*. Questa operazione si rivela anche necessaria affinché gli studenti possano semplicemente scrivere messaggi per fare costruire figure da altri studenti. Questa attività richiede in effetti che gli studenti prendano coscienza del fatto che ci sono sempre due modi diversi per designare la stessa unità figurale e che la "sequenza" di istruzioni è fatta sostituendo un modo di designare con un altro (Duval, 2014).

La designazione verbale delle unità figurali che compongono le forme (2D/2D) è un'operazione cognitivamente molto complessa. Essa riguarda sia i processi che controllano il modo matematico di vedere le configurazioni sia i processi che consentono di ragionare e risolvere problemi in geometria. E, soprattutto, questa operazione non tiene assolutamente conto delle dimensioni. Queste ultime richiedono misurazioni di lunghezza e portano alla sostituzione di numeri o valori numerici alle operazioni di designazione verbale delle unità figurali. Ogni operazione discorsiva di designazione in geometria si basa su quel processo cognitivo che ho chiamato la "decostruzione dimensionale delle forme" (Duval, 2005, 2015).

3.3. La decostruzione dimensionale delle forme visualmente riconosciute a colpo d'occhio

È questa operazione che fornisce la risposta alla cruciale questione epistemologica e cognitiva per l'insegnamento della geometria nella primaria e nella secondaria. In che modo figure o disegni possono visualizzare proprietà e oggetti geometrici?

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo sostituire la nozione di unità figurale a quelle di "figura" e "disegno". Questo perché la nozione di unità figurale *permette di integrare un dato fondamentale della geometria che non è la nozione di spazio, ma quella di numero di dimensioni dello spazio nel quale ci si situa e dunque nel quale avviene la visualizzazione*. Un'unità figurale è caratterizzata dal suo numero di dimensioni: 1D (un tratto dritto o curvo), 2D (un contorno chiuso), 3D/2D (un contorno chiuso che può apparire vuoto, o pieno, o in profondità) e 0D (i punti di intersezione di due unità 1D, *esclusi i punti sovrapposti* a un'unità figurale 1D per rappresentare un numero decimale o reale). Possiamo quindi definire l'operazione cognitiva di decostruzione dimensionale delle forme (Duval, 2015, p. 160; e Figura 10, p. 167).

R.C.3 *In geometria, qualsiasi contorno chiuso visualmente riconosciuto come forma 2D/2D o 3D/2D deve essere visto dimensionalmente come una configurazione di unità figurali 1D o 0D.*

È un'operazione che è tanto percettivamente anormale quanto geometricamente potente. Ma questa operazione non è concettuale. Essa non è la conseguenza dell'acquisizione di concetti o di proprietà geometriche elementari, ma il prerequisito cognitivo preliminare, ciò che l'insegnamento della geometria deve innanzi tutto trattare e sviluppare prima di ogni altra cosa. Perché?

Se analizziamo il vocabolario geometrico di base nella sua relazione con tutte le configurazioni che possono essere costruite strumentalmente, e non semplicemente disegnate a mano libera, notiamo che ci sono due tipi di termini le cui denotazioni sono radicalmente diverse (Duval, 2015, Figura 8, p. 164):

- termini che designano la relazione *tra due unità figurali della stessa dimensione oppure di dimensioni diverse* (parallela, perpendicolare, centro, tangente ecc.); questi sono termini che indicano "proprietà";
- termini che designano *delle configurazioni* (*almeno un contorno chiuso*) *che sono definite da almeno due proprietà* (triangoli, quadrilateri, cubi, cerchi, sfere ecc.); questi sono termini che indicano "forme geometriche" oppure "oggetti geometrici".

Il primo tipo di termini corrisponde alle relazioni che Hilbert considerava come i fondamenti della geometria: "Tra i punti, le rette e i piani, immaginiamo certe relazioni che esprimiamo con termini quali 'essere su', 'tra', 'congruente'; la descrizione precisa e matematicamente corretta di queste relazioni è data dagli assiomi della geometria" (Hilbert, 1899/1900, p. 11).

Per il secondo tipo di termini, bisogna aggiungere la possibilità di un confronto qualitativo tra due unità figurali della stessa dimensione, vale a dire le relazioni "maggiore di" o "minore di" o "uguale a".

Senza una presa di coscienza di questa operazione di decostruzione dimensionale che consente allo sguardo di vedere tutte le unità figurali di una configurazione, il vocabolario geometrico di base non ha senso e non può essere utilizzato. Si resta con quello che ho definito un "approccio botanico" alla geometria (Duval, 2005): impariamo a riconoscere determinate figure come si apprende a riconoscere o a disegnare le foglie degli alberi in una foresta.

Al contrario, per visualizzare la definizione di un oggetto geometrico, ad esempio un parallelogramma o un triangolo, non esiste una "figura tipo", ma una grande varietà di configurazioni (Duval, 2015, Figura 5, p. 160; Figura 6, p. 164).

La decostruzione dimensionale delle forme 2D/2D caratterizza un modo di vedere le figure costruibili con riga e compasso che è specifico della matematica e solo di essa. Tuttavia, essa presenta un legame con il modo puramente artistico di vedere in pittura. Infatti, così come le dimensioni non hanno alcuna importanza in pittura, tranne ovviamente la dimensione della superficie dipinta, che varia dalla miniatura di una medaglia agli affreschi murali o rupestri, la decostruzione dimensionale ignora totalmente le dimensioni delle unità figurali. *Nel modo matematico di vedere le "figure", le misure di grandezza non contano*. Detto in altro modo, la visualizzazione geometrica non ha alcun legame con una geometria empirica nella quale il primo gesto è il gesto concreto di misurare lunghezze per fare calcoli utilizzando formule, essendo queste lunghezze quelle dei lati di una "figura" o quelle di oggetti o superfici reali. Importa solo la dimensione delle molteplici unità figurali che rendono le “figure” più semplici ed elementari delle configurazioni complesse.

La vera domanda per un’introduzione della geometria alla primaria non è dunque sapere quali oggetti geometrici scegliere o quali attività di costruzione di figure “far fare”, ma *come far prendere coscienza del modo matematico di vedere le figure*, indipendentemente dalle loro proprietà e dalle ipotesi scelte per porre un problema.

Al di fuori della geometria, il modo di vedere che si impone è quello corrispondente a R.V.1. E gli allievi in classe non possono liberarsi dal riconoscimento percettivo delle forme a partire dai loro bordi, perché l’altro modo non ha niente di naturale (Duval, 1995b). Le definizioni, le spiegazioni e perfino le attività di costruzione delle figure non cambiano in alcun modo ciò che lo sguardo vede e riconosce immediatamente. È necessario un lavoro specifico per imparare a passare dal riconoscimento di una configurazione di unità figurali 2D/2D al riconoscimento di un insieme di unità figurali 1D come supporti dei bordi di una figura geometrica.

R.C.3' *In geometria, qualsiasi contorno chiuso visualmente riconosciuto deve essere immediatamente visto* a partire dalla rete di unità figurali 1D sottostanti *(linee rette o curve) da cui esso si distingue in quanto unità figurale elementare 2D (triangolo, quadrato ecc.)*.

In altre parole, non si tratta di imparare a costruire figure, ma di costruire e riconoscere la rete di rette sottostante a qualsiasi figura (Duval, 2015, Figura 7, p. 162). R.C.3' è la generalizzazione di R.V.2', vale a dire il prerequisito necessario per l’uso euristico delle figure. Concretamente, questo significa che fin dall’inizio i giovani studenti devono acquisire la capacità di “uscire dalla figura data” estendendo i lati disegnati e la capacità di aggiungere linee tracciate all’interno della figura per dividerla. Ciò presuppone, evidentemente, attività specifiche nelle quali si parte da “figure geometriche” che si possono nominare, ma anche attività che prendono in considerazione delle configurazioni parziali di cui si devono ricostruire tutte le linee che sono state cancellate (Duval & Godin, 2005). In altre parole, si tratta di figure o configurazioni incomplete. Queste attività di ricostruzione sono dei *veri problemi di esplorazione da risolvere con strumenti non graduati*. Per risolvere questi problemi di ricostruzione, si parte da una configurazione geometrica, iconicamente riconoscibile o no, e si cancellano parti più o meno importanti, *in modo tale da poter ritrovare le parti mancanti*. Il grado di cancellazione della configurazione data e la scelta degli strumenti per ricostituire ciò che è stato soppresso sono le due variabili didattiche di questo tipo di attività.

4. La conquista della visualizzazione: costruire o comporre forme 2D/2D per vedere gli oggetti rappresentati in 3D/2D

La percezione riguarda gli oggetti 3D/3D, vale a dire tutto ciò che può essere guardato da diversi punti di vista, ciò che è vicino o lontano, ma sempre direttamente accessibile, eventualmente spostandosi, e quel che può essere manipolato. Quando un oggetto 3D/3D può essere guardato senza soddisfare nessuno di questi tre criteri, come ad esempio una stella nel firmamento, parliamo di punto "all'infinito". Ciò che viene chiamato "geometria nello spazio" non è in realtà *che una disposizione di forme 2D/2D che si fonde in un'unità figurale 3D/2D* corrispondente a oggetti percepiti in 3D/3D. *Per ottenere questo risultato ottico e cognitivo* possono essere applicati due tipi di procedure tanto in geometria quanto in pittura.

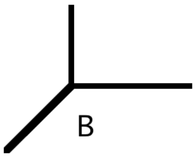
4.1. Vedere i solidi e vedere il rilievo delle superfici

Quando si parla di "vedere", ovviamente nessuno confonderà:

- *quel che è dato a vedere*;
- *la visione*, vale a dire il modo in cui l'occhio cattura ciò che la luce dà a vedere;
- *lo sguardo, che riconosce ciò che viene visto*.

Ciò che viene dato a vedere è radicalmente diverso nella percezione degli oggetti 3D/3D e nelle rappresentazioni grafiche nD/2D (disegno, pittura, configurazioni geometriche) che si possono fare di esse. Allo stesso modo, lo sguardo non è la visione, nella misura in cui l'occhio umano nel suo funzionamento è irriducibile all'obiettivo di una macchina fotografica, a meno che non sia ridotto all'immagine retinica. Ma quando si tratta di "vedere" delle rappresentazioni nD/2D e non più degli oggetti reali 3D/3D, l'unica differenza importante è quella tra lo sguardo e ciò che si dà a vedere nelle "figure geometriche", schemi, schizzi o pittura.

È quindi necessario variare e confrontare ciò che le varie rappresentazioni visuali possibili nD/2D danno a vedere per studiare il funzionamento cognitivo dello sguardo. Per questo è essenziale distinguere le configurazioni geometriche che sono *figure trasparenti* e i dipinti o disegni e le creazioni artistiche che sono *figure in bianco e nero o a colori*. Questa variabile gioca sulla *stabilità o sull'oscillazione del numero di dimensioni delle unità figurali riconosciute al primo colpo d'occhio* e che assorbono tutte quelle di dimensioni più piccole (Duval, 2015, p. 160): 2D/2D o 3D/2D?



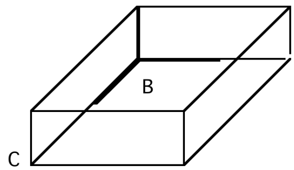


Figure trasparenti: oscillazione del numero di dimensioni.
Le tre linee che partono da B sono sullo stesso piano, oppure no? Lo spigolo CB della scatola è in primo piano o in secondo piano? La scatola è vista dal basso o dall'alto?

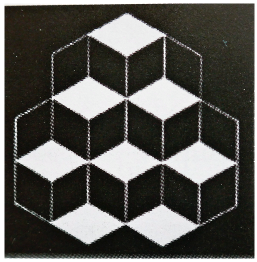


Figure in bianco e nero o a colori: oscillazione limitata alle unità figurali della stessa dimensione.
Sei o sette cubi?
(D'Amore, 2015, p. 441)

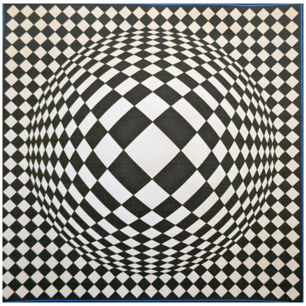
Figura 8. Variazioni su quel che è dato a vedere per costruzione o per composizione.

Il confronto tra la prima figura e la seconda mostra che è solo a partire da forme 2D, vale a dire contorni chiusi, che lo sguardo può riconoscere volumi o solidi 3D. Senza contorni chiusi, il riconoscimento è visualmente instabile, in quanto lo sguardo oscilla tra la vista di un elemento che appare in rilievo o esterno e la vista dello stesso elemento che appare incavato o interno. Per confrontare la seconda e la terza figura, bisogna usare il secondo principio del riconoscimento visuale (*supra*, R.V.2). La trasparenza della seconda figura consente di vedere *contemporaneamente per sovrapposizione le sei facce (2D) di un solido*. Perché qui ciò che si riconosce immediatamente è una singola unità figurale 3D e non la giustapposizione di sette unità figurali giustapposte. Nella terza figura, *l'uso dei colori separa i contorni chiusi* e impone al contrario *un riconoscimento per giustapposizione dei contorni chiusi*. Il primo principio del riconoscimento visuale consente quindi di vedere immediatamente a colpo d'occhio sei unità figurali 3D, che appaiono in rilievo su uno sfondo nero e non bianco (*supra*, R.V.1). Per vedere sette unità figurali, serve un ribaltamento dello sguardo, più difficile da effettuare. Ma esso diventa evidente se si inverte l'orientamento del quadro, in modo che la faccia superiore bianca del cubo superiore si trovi in basso.

L'uso di colori per coprire le superfici dei contorni chiusi offre possibilità inesauribili per la creazione artistica. Così, un dipinto è l'incontro tra ciò che viene dato a vedere per composizione e ciò che lo sguardo riconosce immediatamente. Il dipinto riprodotto sulla copertina del catalogo dell'esposizione delle opere di Vasarely dal 1933 al 1973 ne offre uno splendido esempio (Vasarely, 2011) (Figura 9). Ciò che è dato a vedere si verbalizza attraverso la descrizione della procedura di composizione (in basso a sinistra). Questa procedura è in qualche modo analoga a quella messa in opera in uno dei mosaici di Saint Romain-en-Gal (Figura 3C). *Ciò che lo* *sguardo riconosce rende esplicita la verbalizzazione silenziosa e in linea le metafore* (in basso a destra).

"Ho dipinto un quadro formato da una scacchiera bianca e nera che subisce una doppia deformazione, convessa, per ingrandimento del quadrato di base, e concava, per rimpicciolimento del quadrato di base della stessa scacchiera (…) Questa volta, tuttavia, ho ottenuto non solo un rigonfiamento, ma anche un avvallamento percettivo nella stessa tela" (Vasarely, citato in Ferrier, 1969, p. 79).

A. Ciò che è dato a vedere attraverso la composizione di superfici giustapposte.



B. L'opera realizzata, 1965.

"L'ho battezzata con il nome della stella Vega, che si trova a 25 anni-luce dal nostro sistema solare. Al di là si trova l'universo in espansione: la condensazione e la fuga disperata delle galassie" (Vasarely, citato in Ferrier, 1969, p. 79).

C. Ciò che lo sguardo riconosce, un'unità figurale 3D, e quel che essa rappresenta.

Figura 9. Fusione di una giustapposizione di forme 2D/2D in una unità figurale 3D/2D.

C'è un profondo divario cognitivo tra la percezione degli oggetti 3D/3D e il riconoscimento di solidi in una figura trasparente che sovrappone unità figurali 2D/2D. Ad esempio, si possono tenere nella propria mano le sei facce di una piccola scatola o di un cubo, ma *è impossibile vederle tutte allo stesso tempo*, senza far ruotare l'oggetto 3D/3D che si ha in mano. Ci sono sempre alcune facce nascoste. E questa è la sfida nell'introdurre "la geometria nello spazio". Questa non lavora sugli oggetti nello spazio, ma su ciò che viene dato a vedere attraverso costruzioni piane.

Come far passare dall'una all'altra? In effetti, non si tratta di riconoscere dal punto di vista del botanico un cubo, una piramide o qualsiasi altro poliedro regolare, né di descriverlo in base al numero dei suoi vertici, spigoli e facce. *Si tratta di riconoscere i diversi piani di taglio possibili dell'oggetto rappresentato e di riconoscere le forme 2D che si ottengono*. In altre parole, si tratta di decostruire dimensionalmente le rappresentazioni 3D/2D in rappresentazioni 2D/2D sulle quali si potrà ragionare. Questa operazione di decostruzione è cognitivamente diversa da quella delle unità figurali 2D in una configurazione di unità figurali 1D. Come far emergere questo tipo di sguardo negli studenti?

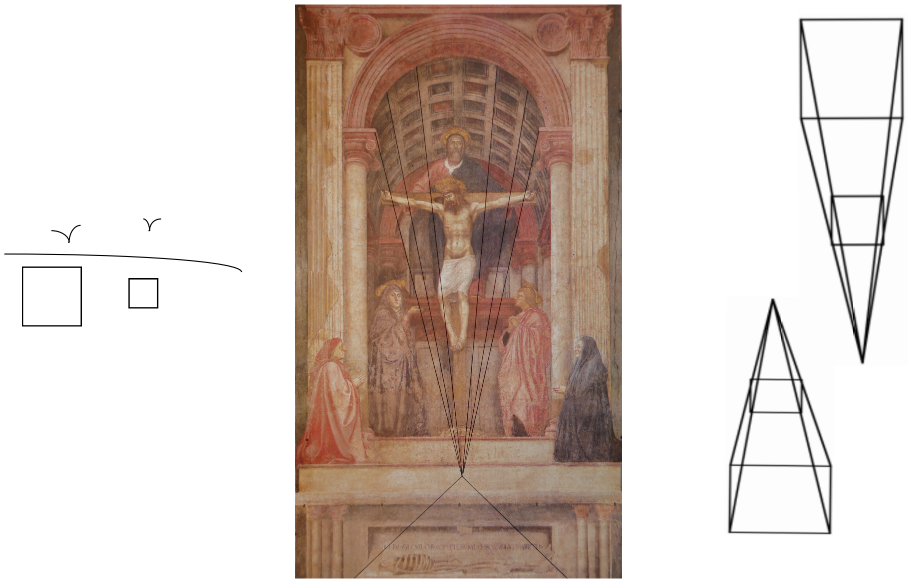
Non è sufficiente avere in un angolo dell'aula una collezione di modelli che possono essere osservati come si osservano cristalli e pietre (Sorrell, 1973). Bisogna disporre di due tipi di materiali: modelli traslucidi di alcuni poliedri notevoli, sui quali si possono tracciare linee, e un set di sagome delle diverse forme 2D che possono essere ottenute da ciascuno di questi modelli tagliandoli con un piano. Gli studenti possono quindi esplorare oggetti 3D/3D con oggetti 2D/3D e 1D/3D per trovare la figura 2D/2D che permette un ragionamento matematico.

È questo tipo di attività che rende possibile capire come si possono *studiare le forme tridimensionali riportandole su un piano*, senza fare geometria descrittiva alla Monge (Rommevaux, 1991, 1997, 1998).

4.2. Lo sguardo, la disposizione degli oggetti nello spazio e la prospettiva

L’invenzione della prospettiva è stato un avvenimento tanto decisivo per lo sviluppo della geometria come lo fu per lo sviluppo della composizione pittorica (Bkouche, 1988, 1994). Essa contraddistingue la presa in considerazione del *punto di vista* nella *rappresentazione piana 2D/2D di ciò che viene percepito non solo in 3D/3D come un solido, ma anche a distanze sempre più grandi dal punto di vista*. La presa in considerazione di questi aspetti è essenziale per comprendere l’invenzione della prospettiva. *Perché, per poter dissociare la vista dallo sguardo e da ciò che un occhio capta, serve un dispositivo di osservazione*: lo stetoscopio Alhazen e soprattutto quello usato da Brunelleschi, costituito da un foro praticato su un quadro e uno specchio. Occultando la vista diretta del battistero di San Giovanni e sostituendo ad essa l’immagine riflessa nello specchio dell’immagine che era stata dipinta alla rovescia, era possibile notare la perfetta coincidenza di una parte del battistero e di una parte dell’immagine dipinta alla rovescia mediante questo dispositivo. Così Brunelleschi dimostrò che la costruzione bidimensionale di rette concorrenti in un singolo punto permetteva di rappresentare fedelmente la percezione diretta di oggetti tridimensionali così come le loro reciproche distanze da chi li guarda (Comar, 1992, pp. 32–33).

Il passaggio, o il salto, dalla percezione 3D alla rappresentazione 2D di ciò che viene percepito, risulta dalla messa in corrispondenza della linea d’orizzonte con la costruzione di rette concorrenti in un punto. La linea d’orizzonte è *la linea di fuga dello sguardo*. Essa separa ciò che è sulla superficie terrestre da tutto ciò che è nel cielo (Duval, 1995b, p. 187). La costruzione di rette concorrenti si riferisce a una trasformazione geometrica: l’*omotetia*. C’è una considerevole variazione delle configurazioni omotetiche possibili, essendo alcune riconosciute come piane e altre in prospettiva (Lemonidis, 1990, pp. 58–59). Il dispositivo di Brunelleschi ha quindi portato a definire tecnicamente *un punto di fuga rispetto* al punto di vista. Evidentemente questo punto di fuga può trovarsi sulla linea di fuga che è l’orizzonte o al di fuori di essa. E non deve essere confuso con *un punto all’infinito*, che è il punto di intersezione delle rette concorrenti quando esse sono considerate come la rappresentazione matematica di rette parallele dunque infinite. La *Trinità* di Masaccio, che è stata dipinta nella chiesa di Santa Maria Novella poco dopo l'invenzione della prospettiva di Brunelleschi (1425), fu una prima applicazione alla composizione pittorica (D'Amore, 2015).



Al di sopra e al di sotto della linea d'orizzonte che è la linea di fuga della superficie della Terra.

Il punto di fuga è sulla linea d'orizzonte, e qui la linea d'orizzonte è all'altezza degli occhi di chi guarda (Thuillier, 1984).

Rette concorrenti e omotetia. Una gamma illimitata di configurazioni (Lemonidis, 1990).

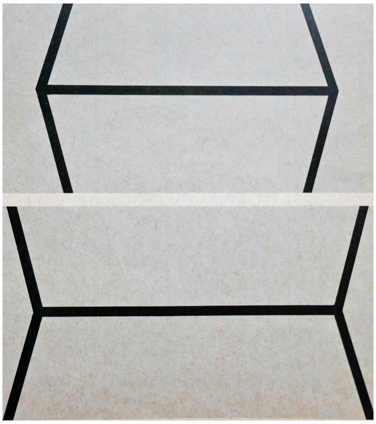
Figura 10. All'incrocio dello sguardo, della percezione, dell'ottica e della visualizzazione geometrica.

La costruzione della prospettiva non deve essere confusa con il problema della costruzione di colonne che devono essere rigonfiate per compensare la distorsione ottica della percezione a una certa distanza ed essere viste perfettamente verticali, cioè l'èntasi. L'esempio più famoso è quello delle colonne del Partenone, percettivamente riconosciute come parallele. Ictiros, Callicrate e Fidia, gli architetti, non disponevano della prospettiva.

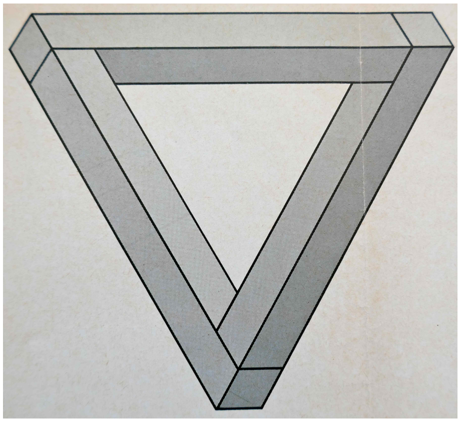
4.3. Una separazione necessaria in geometria e, forse, in pittura: la separazione delle forme dalle dimensioni

Questa separazione è fondamentale per un'analisi semio-cognitiva della visualizzazione matematica e del modo matematico di vedere una configurazione costruita strumentalmente. Esse conducono a trattamenti matematici in registri radicalmente diversi. E questi trattamenti matematici si traducono in gesti e attività concrete radicalmente diversi. Da un lato, dividere, capovolgere, trasformare una forma in un'altra, riconfigurare ecc. Dall'altro, misurare per calcolare, utilizzando delle formule. Per evidenziare questi due versanti opposti della geometria, possiamo prendere l'esempio delle illusioni percettive. La scelta di questo esempio è pertinente perché le illusioni percettive sembrano corroborare l'opposizione, spesso fatta in didattica della matematica, tra il "disegno" che si vede e la "figura", vale a dire tutte le possibili variazioni del disegno che non alterano una data proprietà.

Ciò che chiamiamo "illusioni percettive" sono rappresentazioni visuali che sono costruite strumentalmente, vale a dire "figure geometriche". Ma il fenomeno essenziale che esse rivelano è l'esistenza di due tipi di illusioni. Il primo tipo si basa unicamente sulla stima delle dimensioni e il secondo sul riconoscimento delle forme 2D/2D o 3D/2D indipendentemente da qualsiasi dimensione (Gregory, 1968).



A. Contraddizione nella stima visuale delle dimensioni: illusione di Müller-Lyer (1889).



B. Visualizzazione di una forma 3D impossibile: il triangolo o tribarra dei Penrose (Penrose & Penrose, 1958).

Figura 11. Due tipi eterogenei di illusioni nella visualizzazione geometrica.

La costruzione di Müller-Lyer può essere vista alternativamente in rilievo, incisa o piatta come la prima costruzione in Figura 11. Ma non è questo che l'ha resa interessante. Essa ha permesso delle osservazioni misurabili molto semplici che potevano essere fatte fare agli studenti della primaria come introduzione alla geometria. Tutto ciò che serve è un materiale molto semplice da preparare.[5]

[5] Su un cartoncino bianco, si costruisce la figura in alto o quella in basso (Figura 11A). Su una striscia di carta si costruisce l'altra figura amputata di una delle frecce. Sul retro di questa

La visualizzazione geometrica dei Penrose è, per la sua costruzione 2D, assolutamente irrealizzabile in 3D/3D. Essa ha ispirato molti artisti tra cui Escher (D'Amore, 2015, pp. 408–411). Ma essa costituisce un problema matematico: Quali segmenti devono essere cancellati o quali segmenti si devono prolungare, rendendo trasparente la figura, affinché il triangolo dei Penrose diventi la rappresentazione visuale di un assemblaggio di tre travi di legno? L'interesse di questo problema è di mostrare il punto in cui la visualizzazione geometrica e la creazione artistica visiva divergono totalmente. È anche un problema didattico perché permette di far prendere coscienza di come si passa da uno sguardo in 2D/2D a uno in 3D/2D.

Ciò che sorprende è che questa separazione tra il riconoscimento delle forme e delle dimensioni, che corrisponde a due campi di variabili indipendenti, non è mai stata fatta da un punto di vista cognitivo o didattico. E questa mancata separazione tende a privilegiare un'introduzione della geometria che privilegi delle attività centrate sulle dimensioni, cioè sulla costruzione di figure che comportano misurazioni e sul calcolo delle dimensioni usando formule stabilite per figure tipiche del triangolo e dei quadrilateri regolari.

5. Lo sguardo nel lavoro matematico e i due registri di visualizzazione

La rivoluzione semiotica in matematica non fu dovuta solo all'emergere dell'algebra in appena due secoli, ma anche all'emergere di un *nuovo registro di visualizzazione* che è indissociabile da essa (Duval, 2017, pp. 8–9). Fondato su un sistema di assi orientati e graduati, esso permette non solo di convertire le equazioni in curve e superfici, ma anche di effettuare conversioni inverse, sebbene ciò sia molto più complesso dal punto di vista cognitivo. Questa rivoluzione semiotica non ha solo aperto nuovi domini di studio in matematica, ma ha in un certo senso imposto un nuovo modo di fare matematica e soprattutto geometria. Per non confonderlo con il registro della visualizzazione geometrica, si potrebbe chiamarlo *registro cartesiano* o più esattamente *registro analitico-grafico*.

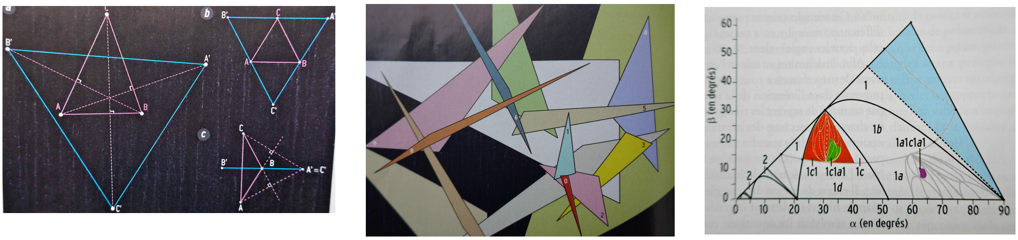
Dopo appena qualche dozzina d'anni, questo secondo registro di visualizzazione è diventato, con i computer, il principale strumento di visualizzazione. Questo perché, rispetto a tutte le costruzioni geometriche che si possono eseguire su carta con riga e compasso (Frère Gabriel-Marie, 1920), esso presenta tre vantaggi incomparabili. Prima di tutto è considerevolmente più potente. E poi, è dinamico, in modo tale che si possano seguire sullo

---

striscia si indicano dei punti di riferimento di lunghezze. Questa striscia può scorrere sul primo cartoncino. Il compito consiste nello spostare la striscia scorrevole per pareggiare visivamente la lunghezza di una figura con quella dell'altra. Per una data lunghezza di 5 cm per la prima figura, ci può essere una sovrastima o una sottostima di quasi il 50%.

schermo le trasformazioni di una curva o di una qualsiasi figura disegnata. Infine, reagisce quasi istantaneamente al comando senza dover fare altro che premere un tasto della tastiera o cliccare su una “icona”. Qual è la relazione tra questo nuovo registro di visualizzazione e il registro della visualizzazione geometrica? E, soprattutto, lo sguardo rimane lo stesso, con l’aggiunta di tutti i vantaggi e i miglioramenti che abbiamo appena indicato?

Se ci atteniamo al solo punto di vista matematico, ci asterremo dal rispondere e ci accontenteremo qui della seguente osservazione. I due registri di visualizzazione sono entrambi mobilitati ma svolgono ruoli diversi nel lavoro matematico, come si può constatare nel seguente esempio che fa quasi coesistere le tre rappresentazioni visuali sottostanti (Figura 12). Si tratta di stabilire che cosa si ottiene costruendo un triangolo a partire da un primo triangolo seguendo una semplice regola e ripetendo l’operazione. Nell’esempio presentato, il problema è costruire un triangolo a partire dal primo triangolo dato (Nicollier, 2016, pp. 12–15).



A. Le trasformazioni di un triangolo usate come processo di reiterazione.

Visualizzazione geometrica 2D/2D.

B. I primi 13 triangoli ottenuti a partire dal triangolo più piccolo.

Visualizzazione geometrica 2D/2D

C. «Mappamondo dei triangoli».

Visualizzazione analitico-grafica.

Figura 12. I due registri di visualizzazione matematica.

La visualizzazione geometrica utile è ovviamente la A. La visualizzazione B potrebbe essere considerata come una successione di creazioni artistiche, tra le quali possiamo scegliere quella che meglio si relaziona con la verbalizzazione silenziosa dello sguardo. La terza visualizzazione, la C, è ovviamente quella che consente di vedere l’evoluzione delle trasformazioni successive e, più in generale, tutte le possibili trasformazioni del triangolo, alcune delle quali sono “una porta d’ingresso verso il caos”. Per un matematico, probabilmente non ci sono differenze, o differenze importanti, tra questi due registri di visualizzazione. E, da una rappresentazione all’altra, lo sguardo rimane lo stesso, le conversioni sono implicite o abbastanza naturali tra A, B e C.

Ma, dal punto di vista semio-cognitivo, non esiste alcuna relazione tra questi due tipi di visualizzazione, in quanto i loro modi di funzionamento rappresentazionale sono radicalmente diversi e, soprattutto, dall'uno all'altro lo sguardo cambia completamente, *in quanto la verbalizzazione silenziosa, senza la quale lo sguardo vede senza riconoscere nulla, è radicalmente diversa*. La visualizzazione geometrica 2D/2D richiede, come abbiamo spiegato in precedenza, *una decostruzione dimensionale delle forme in unità figurali nD/2D* che sono indissociabili da un linguaggio che si basa su relazioni e nomi di oggetti. Possiamo quindi caratterizzare nel modo seguente lo sguardo che la visualizzazione geometrica esige:

{*unità figurali nD/2D*, decostruzione dimensionale delle forme, vocabolario geometrico}.

Nella visualizzazione analitico-grafica, si passa da una verbalizzazione silenziosa a un'enumerazione silenziosa di numeri (sulla quale Kant basa l'intuizione a priori … del tempo come pura successione!) e a un'algebrizzazione necessariamente scritta e muta (Duval, in corso di stampa). Questo registro di visualizzazione è limitato alla forma globale dell'unità figurale il cui numero di dimensioni è il maggiore. E lì tutti i gradi di libertà, che permettono il riconoscimento per giustapposizione e il riconoscimento per sovrapposizione, spariscono (*supra*, R.V.2). Ciò che diventa essenziale è il riconoscimento *dei valori visivi qualitativi* di questa forma globale. Tuttavia, questi valori visivi qualitativi non si riconoscono isolatamente ma in un insieme di opposizioni, come tutti i segni linguistici (Duval, 2017, pp. 79–80). In altre parole, il tipo di sguardo che la visualizzazione analitico-grafica esige è quello della lettura. D'altra parte, le relazioni tra la figura e lo sfondo qui si invertono (*supra*, R.V.1). Questo perché la forma globale dell'unità figurale che si impone deve essere riferita ai due assi orientati e graduati, senza i quali non c'è più visualizzazione analitico-grafica. Qualsiasi riconoscimento iconico non può dunque che essere didatticamente fuorviante. Lo sguardo che la visualizzazione analitico-grafica esige è quindi caratterizzato come segue:

{numeri, equazioni, *valori visivi qualitativi di una forma globale*}.

Di fronte a un dipinto, al contrario, la verbalizzazione silenziosa è fondamentale. Perché in questo caso non si tratta di riconoscere ciò che è stato costruito o composto, ma di lasciarsi catturare (e sedurre) solo da ciò che si dà a vedere al primo sguardo e che si rivela sempre nuovo. In questo caso la verbalizzazione silenziosa è un'associazione libera, che può essere spiegata o meno. In questo senso si può dire che un dipinto "parla" allo sguardo, o non parla affatto. Lo sguardo che un quadro o un affresco sollecitano, si caratterizza come segue:

{*quel che viene dato a vedere*, colori, libera associazione di parole}.

Siamo qui alle fonti dell'esplorazione e della creatività nella geometria e nell'arte. Ad esse la geometria elementare e la pittura attingono lo stesso modo di costruire e comporre le forme che esse danno a vedere (R.V.). I quadri appartengono allo stesso registro di rappresentazione delle configurazioni geometriche. Ma le configurazioni geometriche e i quadri divergono fin dall’inizio nel riconoscimento cognitivo di quel che essi danno rispettivamente a vedere (R.C.). Infatti non è lo stesso sguardo, né la stessa modalità di verbalizzazione silenziosa che li guida nei rispettivi processi di esplorazione e creazione. Mentre il dipinto è autosufficiente, in quanto lo sguardo si perde in ciò che è dato a vedere, le configurazioni geometriche evocano un dire che è interamente controllato da un processo di ragionamento, come Platone ha sottolineato nella *Repubblica* (VI, 510 d-e) (Lozza, 1990). In altre parole, la pittura è mono-registro, mentre la geometria richiede la coordinazione cognitiva con il registro della lingua naturale, ma usata in modo opposto rispetto all’uso del modo spontaneo di dire e parlare (*supra*, 3.2).

Va qui notato che stiamo evitando di entrare nel terreno della relazione semiotica fra disegno, oggetto rappresentato (in forma più o meno iconica) e opera d’arte, una relazione sottile sempre più presente, anche in forma evidentemente consapevole da parte degli artisti, almeno a partire dalle opere di Magritte, e poi essa stessa opera d’arte, soprattutto dopo la nascita della corrente “concettuale scientifico” (D’Amore, 2015, pp. 317–322).

6. Quali conseguenze didattiche per l’insegnamento della geometria elementare?

Il confronto tra la visualizzazione geometrica e la visualizzazione pittorica su un supporto materiale consente di evidenziare tre idee guida per l’educazione allo sguardo nell’introduzione della geometria elementare.

Prima di tutto, la visualizzazione geometrica esige uno sguardo, cioè un riconoscimento a prima vista, di tutte le forme possibili 2D/2D, che va non solo contro la percezione 3D/3D, ma anche contro lo sguardo che le altre forme di visualizzazione richiedono (*supra*, RV2' e RV2").

Dopo di che, ogni sguardo su una visualizzazione implica una verbalizzazione spontanea silenziosa che contraddistingue il riconoscimento cognitivo di ciò che essa dà a vedere. Vedere e dire sono nello sguardo la stessa cosa. È in questo senso che ogni immagine “parla” o “non parla”. La verbalizzazione orale spontanea chiarisce e amplifica questa verbalizzazione silenziosa, ma non la modifica. In altre parole, essa non cambia lo sguardo su ciò che una visualizzazione dà a vedere. Ed è questa verbalizzazione silenziosa associata automaticamente a tutte le altre forme di visualizzazione artistica o scientifica che viene a scontrarsi con ciò che gli insegnanti possono spiegare o dire in relazione alle attività geometriche che essi propongono agli studenti. Ciò perché la decostruzione dimensionale delle forme 2D/2D in unità figurative 1D/2D è la prima soglia da far superare agli studenti. Essa è la condizione cognitiva necessaria affinché il vocabolario geometrico più elementare si articoli con le configurazioni di unità figurali 1D o 0D e affinché le parole le possano far vedere (*supra*, R.C.3').

La terza idea guida è la necessità di separare assolutamente ciò che rientra nel riconoscimento visuale e cognitivo delle forme, e ciò che riguarda le dimensioni, vale a dire qualsiasi attività di misurazione per eseguire calcoli usando delle formule. Le illusioni o i paradossi ai quali la costruzione di figure geometriche dà luogo non sono della stessa natura e, soprattutto, richiedono che si passi a una dimensione superiore (3D/2D) invece di eseguire una decostruzione dimensionale (Figura 11). Esse accecano coloro che li invocano come argomenti per subordinare tutto alla conoscenza, al ragionamento e ai concetti.

7. Note conclusive

Evidentemente, questo approccio alla geometria elementare è agli antipodi di quello che suggeriscono i programmi, l'organizzazione delle sequenze di attività in aula e anche i test di acquisizione di conoscenze e tutte le indagini nazionali o internazionali. Non a caso abbiamo scelto la figura geometrica doppiamente codificata riportata sopra (Figura 1B). L'abbiamo presa da due valutazioni nazionali fatte in Francia nel 1997 e nel 1998 all'ingresso della scuola media. Può essere vista sia per sovrapposizione sia per giustapposizione, come abbiamo indicato più volte. Quasi l'80% degli studenti l'ha riconosciuta per sovrapposizione e non per giustapposizione e sono stati ovviamente indotti a rinunciare oppure a misurare (Duval, 2000, pp. 11 e 17). E potremmo trovare gli stessi profili di risposta, a seconda che la figura data vada o no contro il riconoscimento immediato delle forme, in tutte le indagini, comprese quelle fatte alla fine del biennio superiore, con studenti di 15 o 16 anni.

Ma la cosa più strana nell'insegnamento della geometria elementare non è questa. Ignorando il ruolo fondamentale dello sguardo nella comprensione in geometria elementare, e come poterlo realizzare, si è immediatamente portati a privilegiare un approccio concreto e pragmatico in cui si privilegiano le dimensioni e le misure, sul terreno e sul disegno durante le attività di costruzione, per poter utilizzare le diverse formule geometriche riguardanti il contorno, le superfici, i volumi, o anche i teoremi di Pitagora o di Talete. Ma allora ci si scontra ben presto con il fatto che molti studenti non "sanno" riconoscere quale formula usare per calcolare una lunghezza o una superficie in un problema concreto. Allo stesso modo, il passaggio da una geometria sperimentale, in cui si misura e si calcola, a una geometria più deduttiva si rivela incomprensibile e invalicabile.

Ritroviamo qui la domanda iniziale: Come compiere il salto cognitivo dalla percezione e dalla manipolazione di oggetti 3D/3D alla visualizzazione geometrica nD/2D? La possibilità di manipolare oggetti è essenziale per i primi passi nella geometria elementare piana. Ma che cosa viene manipolato esattamente e qual è la relazione tra la manipolazione e la verbalizzazione orale successiva? Tutte le rappresentazioni geometriche sono prodotte su una superficie 2D/3D che funge da supporto materiale e può essere manipolata. Quel che si manipola con un materiale scelto per fare geometria è il supporto. Così si può riprodurre un rettangolo (unità figurale 2D/2D) su un foglio trasparente (supporto 2D/3D), quindi capovolgere il foglio trasparente (*gesto in* 3D/3D) per sovrapporlo alla figura iniziale e vedere se i contorni coincidono. Allo stesso modo, su un modello (oggetto 3D/3D) si possono tracciare delle linee (*gesto* 1D/3D) per ottenere un contorno chiuso (*unità figurale* 2D/2D *nel piano della sezione*). E che dire allora delle rappresentazioni geometriche nD/2D ottenute sullo schermo di un computer, cioè su una superficie dematerializzata? Lo schermo di un computer non è un supporto manipolabile, anche se con uno scorrimento del dito si può modificare o spostare la rappresentazione! E nella pittura la superficie del materiale è inseparabile dalla visualizzazione, come mostrano gli affreschi sulle pareti.

Riferimenti bibliografici

Bkouche, R. (1988). *Quelques grandes problématiques de l’histoire de la géométrie*. Lille: IREM de Lille.

Bkouche, R. (1994). Le projectif ou la fin de l’infini. In Commission inter-IREM (1994), *Histoire d’infini: Actes du 9ème colloque inter-IREM, Épistémologie et histoire des mathématiques, Landerneau 22-23 Mai 1992* (pp. 437–517). Brest: IREM de Brest.

Bonazzi, M. (Ed.). (2010). *Platone, Menone*. Torino: Einaudi.

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, P. Mounoud, & J.-P. Bronckart (Eds.), *Psychologie, Encyclopédie de la Pléiade* (pp. 933–982). Parigi: Gallimard.

Comar, P. (1992). *La perspective en jeu: Les dessous de l’image*. Parigi: Gallimard.

D’Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D’Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D’Amore, B. (2015). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142–157). Berlin: Springer.

Duval, R. (2000). Costruire, vedere e ragionare in geometria: Quali rapporti? *Bollettino dei docenti di matematica, 41*, 9–24.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire: Histoire d'une séquence d'activités. In C. F. Brandt & M. T. Moretti (Eds.), *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Pesquisa na Educaçao Matematica* (pp. 17–38 in portoghese; pp. 227–251 in francese). Ijuí: Editora Unijuí.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: "voir" en géométrie. In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Grenoble: Presses Universitaires.

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. International Conference in occasion of 70 years of Bruno D'Amore.* Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 08 10 2016 (pp. 213–220). Bologna: Pitagora.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Duval, R. (in corso di stampa). Écriture et pensée mathématique: Le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. In J-P. Drouhard (Ed.), *De la linguistique à l'épistémographie*. Special SFIDA-SFIDE. Sarà disponibile in pdf in HAL: academia.edu

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*(1), 7–27.

Ferrier, J.-L. (1969). *Entretiens avec Victor Vasarely*. Parigi: Pierre Belfond.

Frère, G.-M. (1920). *Exercices de géométrie*. Parigi: Editions Jacques Gabay.

Freud, S. (2013). *L'interpretazione dei sogni*. Torino: Einaudi. (Lavoro originale pubblicato in lingua tedesca nel 1899 con il titolo: Die *Traumdeutung*.

Gregory, R. L. (1968). Visual illusions. *Scientific American*, *219*(5), 66–76.

Hilbert, D. (1900). *Les principes fondamentaux de la géométrie* (L. Laugel, Trad. in fr.). Parigi: Gauthier-Villars. (Lavoro originale pubblicato nel 1899 in lingua tedesca con il titolo: *Grundlagen der Geometrie*).

Iori, M. (Ed.). (2016). *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. International Conference in occasion of 70 years of Bruno D'Amore*. Bologna: Pitagora.

Lemonidis, E. C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg. Disponibile da http://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/3786?id=3786&lang=en&p=1#page/2/mode/2up

Lozza, G. (Ed.). (1990). *Platone, La Repubblica*. Milano: Mondadori.

Müller-Lyer, F. C. (1889). Optische Urteilstäuschungen. *Archiv für Anatomie und Physiologie* (Supplemento), 263–270.

Nicollier, G. (2016). Le triangle: une porte d'entrée vers le chaos. *Pour la Science*, 91, 12–18. Disponibile da https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/le-trianglenbsp-une-porte-dentree-vers-le-chaos-9019.php

Padilla Sanchez, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg.

Penrose, L. S., & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, *49*(1), 31–33.

Reale, G. (Ed.). (2000). *Aristotele, Metafisica.* Milano: Bompiani.

Remi, G. (Hergé) (1936) [versione bianco e nero]. *Le lotus bleu.* [*Les aventures de Tintin*]. Tournai: Casterman.

Remi, G. (Hergé) (1946) [versione a colori]. *Le lotus bleu.* [*Les aventures de Tintin*]. Tournai: Casterman.

Rommevaux, M.-P. (1991). Le premier pas dans l'espace. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *4*(1), 85–123.

Rommevaux, M.-P. (1997). *Le discernement des plans: Un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. (Tesi di dottorato). Université Louis Pasteur (U.L.P.), Strasbourg.

Rommevaux, M.-P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 27–65.

Sorrell, C. (1973). *A field guide and introduction to the geology and chemistry of rocks and minerals.* Racine, WI: Western Publishing Company.

Thuillier, P. (1984). Espace et perspective au Quattrocento. *La Recherche*, 160, 1384–1398.

Vasarely, V. (2011). *Vasarely: Œuvres de 1933 à 1973* [Catalogo della mostra]. Parigi: Galerie Pascal Lansberg.

[Traduzione di Bruno D'Amore e Maura Iori]

Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1]*Doctorado Interinstitucional en Educación DIE, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2]*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Abstract. *In this paper we plan to examine terms and ideas (especially from the fields of pedagogy and psychology) that were very popular during the first years of mathematics education, but which today seem destined for oblivion. The aim is to remind the young scholars of mathematics education the pioneering effort of the first creators of this theory, suggesting to some of them to consider, as a possible field of research, that of the historical-critical-epistemological bases of the theory itself.*

Keywords: images, models, concepts, representations, schemes, scripts, situations, figural concepts, fields, skills.

Sunto. *In questo scritto ci proponiamo di prendere in esame termini e idee (soprattutto tratti dai campi della pedagogia e della psicologia) che sono stati molto in voga durante i primi anni di sviluppo della didattica della matematica, ma che oggi sembrano destinati all'oblio. Lo scopo è quello di ricordare ai giovani studiosi di didattica della matematica lo sforzo pionieristico dei primi creatori di questa teoria, suggerendo a qualcuno di essi di prendere in esame, come possibile campo di ricerca, quello delle basi storico-critico-epistemologiche della teoria stessa.*

Parole chiave: immagini, modelli, concetti, rappresentazioni, schemi, script, situazioni, concetti figurali, campi, competenze.

Resumen. *En este artículo, pretendemos examinar términos e ideas (especialmente de los campos de la pedagogía y la psicología) que fueron muy populares durante los primeros años de la educación matemática, pero que hoy parecen destinados al olvido. El objetivo es recordar a los jóvenes estudiosos de la educación matemática el esfuerzo pionero de los primeros creadores de esta teoría, sugiriendo a algunos de ellos que consideren, como posible campo de investigación, el de las bases histórico-críticas-epistemológicas de la teoría misma.*

Palabras clave: imágenes, modelos, conceptos, representaciones, esquemas, guiones, situaciones, conceptos figúrales, campos, competencias.

1. Premessa

Durante la prima fase di sviluppo di una qualsiasi teoria, molti ricercatori, pionieri della prima ora, propongono tesi e termini che possono poi avere maggiore o minore fortuna, maggiore o minor durata, nell'iter dell'evoluzione della teoria stessa. Come dice quasi ironicamente Thomas Romberg, in quella fase ci sono tanti ricercatori quante nuove idee che entrano talvolta in contrasto fra loro (Romberg, 1983, 1988; D'Amore, 2007). Non solo, ma molte sono le richieste continue e le occasioni di discussione sul significato e le interpretazioni possibili della teoria oggetto di costruzione.

L'evoluzione di una teoria, però, a volte fa torto a questi fondatori-iniziatori e, quando poi si sviluppa, consolidandosi, tende talvolta a dimenticare questi contributi pionieristici e a spazzar via nomi di autori, tesi e termini, talvolta inglobandoli in altri più ampi e comprensivi, altre volte semplicemente ignorandoli.

Noi riteniamo che ciò sia dannoso, che nello sviluppo avanzato di una teoria consolidata ci debba essere un sottoinsieme non vuoto di studiosi il cui compito è quello, critico-storico, di ricordarne le origini. Il risultato potrebbe altrimenti essere deleterio, come fu quello del tentativo di inaugurare una "geometria senza figure" (durante il periodo in cui dominò l'idea di *Nuova Matematica* o *Matematica Moderna*, negli anni '60 e '70, che si ispirava, maldestramente, alla lezione strutturale dei Bourbakisti e che pose alla base di qualsiasi azione didattica la teoria ingenua degli insiemi); o del conseguente famoso grido "À bas Euclide" lanciato dal grande matematico francese Jean Dieudonné, uno degli ispiratori del movimento citato in precedenza, nel 1959, durante un importante convegno internazionale a Royaumont.

Tanto per fare un esempio ovvio, la geometria analitica ha senza alcun dubbio trionfato sulla geometria sintetica, nonostante i tentativi (un po' ridicoli) di avversione, per esempio quello famoso di Nicola Fergola tra la fine del XVIII e la prima metà del XIX secolo, presso l'università di Napoli; ma questo trionfo nulla toglie al valore formativo, storico, epistemologico, estetico e scientifico della geometria nata con Talete e sviluppatasi fino agli *Elementi* di Euclide, il cui culmine ci piace porre nell'opera di David Hilbert del 1899 (le famose *Grundlagen der Geometrie*) (Hilbert, 1899).

Abbiamo così deciso di ricordare alcuni termini oramai messi nell'ombra, o quasi, dalla moderna evoluzione della didattica della matematica (DdM), nella speranza che ricordarli possa servire a quegli studiosi che non vogliono perdere contatto con le origini della nostra disciplina. Abbiamo volutamente scelto termini tratti soprattutto dal mondo della pedagogia e della psicologia, sicuri come siamo della tesi che più volte abbiamo difeso, e cioè che la moderna DdM abbia incluso nella sua organizzazione attuale tutto quel che di pedagogia e psicologia poteva essere utile, come parte significativa dello sviluppo scientifico della nostra disciplina. Negli anni '80 alcuni di noi ricercatori, in genere matematici, ci siamo sforzati di studiare queste discipline appunto per catturarne e fare nostri i concetti, le idee, le creazioni culturali e scientifiche che apparivano necessarie alla DdM; a quei tempi si suggeriva, anche in contesto internazionale, a chi voleva occuparsi di DdM come ricercatore o come professionista (per esempio docente di scuola) di seguire corsi di queste due interessanti discipline (Fandiño Pinilla, 2003); ma, successivamente, questo non si è più ritenuto necessario, dopo che il percorso di inserimento delle idee significative e specifiche era stato compiuto. Non è un caso, a nostro avviso, che ben tre dei più importanti studiosi della prima ora di DdM, il rumeno Efraim Fischbein (fondatore del PME) e i francesi Gérard Vergnaud e Raymond Duval siano psicologi. Il loro contributo all’evoluzione della DdM è tutt’oggi da considerarsi eccezionale, soprattutto se si pensa che quasi tutti gli altri nomi che solitamente si citano come studiosi di base della DdM sono di matematici. Si veda il bel ricordo che David Tall ha dedicato a Fischbein (Tall, 1999).

Il testo che segue è una revisione notevolmente ampliata e attualizzata di vari articoli e testi, soprattutto D’Amore (1999, 2000, 2011).

2. Modelli

2.1. Modelli mentali

Si era soliti tracciare due tipi di profili, per i modelli mentali, che però sostanzialmente si equivalgono da un punto di vista cognitivo: modelli *statici* e modelli *dinamici*. In sintesi, il modello mentale è pensato come *rappresentazione analogica cosciente della conoscenza*.

Per cominciare, occorre porre in evidenza la corrispondenza tra:

- ciò che si vuol rappresentare e le relazioni tra i costituenti di ciò che si vuol rappresentare;
- modello mentale rappresentante e relazioni tra elementi costituenti di tale modello mentale rappresentante.

In questa sottile distinzione si evidenzia la *consapevolezza* di chi si costruisce il modello; già nel momento della costruzione si fa in modo che esso sia coerente sia con il fatto reale che si vuol rappresentare, sia con l’uso che poi si farà di tale modello (Johnson-Laird, 1983; Johnson-Laird & Byrne, 1991; Bara, 1990). Dunque, non c’è *un* modello mentale semplicemente corretto o no del tal fatto (o idea, o concetto, o situazione, ...), ma bisogna prendere in esame anche che cosa si intende fare poi con quel modello, cioè qual è lo scopo per il quale lo si costruisce.

Stando così le cose, c’è un’altra importante componente: l’idea di un modello non solo costruito in modo consapevole, ma che tenga conto sia del soggetto sia dell’uso; tale modello, dunque, connota sia l’intensione sia l’estensione dell’oggetto rappresentato; con le parole di Bara (1990):

> Il nucleo del modello mentale rappresenta l’intensione di un concetto, vale a dire

> le proprietà caratteristiche dello stato di cose descritto; le procedure di gestione del modello sono utilizzabili per definire l'estensione del concetto stesso, cioè l'insieme di tutti i possibili stati di cose che il concetto descrive. (Bara, 1990, p. 140)

Poiché abbiamo avuto modo di rilevare che i termini *estensione* e *intensione* non sono poi così diffusi, diremo, seguendo le idee di Gottfried W. Leibniz, che l'*estensione* di una proprietà è la raccolta di tutti e soli quegli oggetti (o elementi) che, rispetto a quella dichiarata proprietà, sono tra loro sostituibili l'uno con l'altro (sono cioè indistinguibili rispetto a quella proprietà).

Per esempio, consideriamo l'insieme dei trapezi, intesi come quei quadrilateri che hanno almeno una coppia di lati paralleli, e assegniamo la proprietà: "avere entrambe le coppie di lati paralleli"; ecco che si ottengono per restrizione i parallelogrammi; non c'è un parallelogramma più … *parallelogramma* di un altro: un quadrilatero o è un parallelogramma o non lo è. Se imponiamo ora che valga un'ulteriore proprietà, cioè se si aumentano le caratteristiche dell'oggetto che vogliamo porre in esame, allora cresce l'intensione; ma, parimenti, diminuisce l'estensione, cioè l'insieme, da vasto che era, con l'aggiunta di un'ulteriore richiesta diventa meno comprensivo, meno "esteso". Proseguendo nell'esempio, chiediamo ora di evidenziare quei parallelogrammi che soddisfano una proprietà in più, per esempio: "avere le diagonali congruenti"; ecco allora che questo aumento di intensione, cioè la richiesta di una proprietà caratteristica in più, ci costringe a *scegliere* tra i parallelogrammi solo quelli che hanno quella proprietà, i rettangoli. Quindi, l'estensione diminuisce. Come si usa dire da ben oltre cent'anni: l'insieme dei rettangoli è strettamente incluso nell'insieme dei parallelogrammi.

Di estremo interesse sono le caratteristiche richieste a un modello mentale da Johnson-Laird (1972, 1983):

- un modello mentale deve essere *computabile*, nel senso che deve essere possibile una sua simulazione algoritmica;
- un modello mentale deve essere *finito*.

Ma a volte la "scena" che si vuol descrivere non è finita di per sé stessa; per esempio, nella frase: "Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari", si parla di una quantità infinita di enti in gioco: impossibile allora costruirne un modello finito di tipo estensionale; anche la frase: "Tutti gli uomini sono mortali", sebbene chiami in causa un numero finito di enti, gli esseri umani passati, presenti e futuri, non può avere un modello realmente estensionale perché il numero di uomini chiamati in causa è troppo vasto; in tali casi, allora, si ricorre a un qualche cosa che Johnson-Laird chiama *elementi di base*: enti rappresentativi degli elementi in gioco, scelti in modo significativo. Tali elementi di base sono di tre tipi:

- *Primitive*: sono innate e costituiscono la base delle capacità percettive, motorie, emozionali, cognitive di ogni essere umano; sono legate a percezioni, ad azioni, a capacità cognitive fondamentali: confrontare, memorizzare; a emozioni di base: paura, felicità; queste primitive creano campi semantici detti appunto *primitivi*.

- *Concetti semplici*: sono i concetti costruiti sui campi semantici primitivi: causa, intenzione, idea condivisa pienamente di oggetti o di esseri sotto gli occhi di tutti (esempio: animali), a destra di, diverso da, prima di, ...
- *Concetti complessi*: sono concetti più evoluti, ottenuti per accostamenti di concetti semplici; coinvolgono emozioni di livello più elevato, idee più sofisticate, oggetti complessi.

Si usa spesso il sostantivo *isomorfismo*: il modello mentale rappresenta davvero, cioè è "isomorfo" alla situazione che rappresenta. (In questo senso, il modello alla Johnson-Laird assomiglia molto all'idea matematica di *modello*).

Vi sono poi modelli *figurali* e *proposizionali*. Per esempio, descrivere nella lingua comune una situazione reale, è una rappresentazione proposizionale, un modello a parole. Ma anche una sola parola può o no essere un modello. Come controesempio, la scelta della parola "quadrato" per indicare un quadrato non è fatta per crearne, individuarne un modello: la parola "quadrato" non ha nulla a che fare con la forma cui allude; in compenso, la parola "quadrato" allude a un modello che la competenza e l'esperienza ci danno. Torniamo all'elenco di prima, non ancora esaurito:

- il modello mentale deve essere *economicamente conveniente*, cioè deve richiedere il minimo sforzo cognitivo possibile per rappresentare in modo significativo quel che vogliamo che rappresenti;
- i modelli mentali devono essere *combinabili* l'uno con l'altro, per ottenere nuovi modelli più complessi e maggiormente comprensivi.

Johnson-Laird (1983) propone anche una tassonomia dei modelli, distinguendoli soprattutto in due categorie:

- modelli *fisici*: rappresentano situazioni aventi a che fare con il mondo fisico;
- modelli *concettuali*: rappresentano situazioni astratte.

Dei primi diamo solo l'elenco: relazionale, spaziale, temporale, cinematico, dinamico, di immagine (rinviamo a D'Amore, 1993, 2014, per una più dettagliata analisi). Dei secondi diciamo qualche cosa di più. Un modello concettuale può essere:

- *monadico*: concerne proprietà di individui;
- *relazionale*: riguarda relazioni tra gli individui di uno stesso modello monadico;
- *metalinguistico*: dà elementi o relazioni i cui oggetti sono o elementi o relazioni dei modelli relazionali o monadici;
- *insiemistico*: introduce raggruppamenti o classificazioni all'interno di termini già dati.

Da sempre, ai matematici interessati a questo genere di questioni è più consono lo studio dei modelli concettuali, che sembrano essere i più promettenti nel campo della didattica della matematica (Noirfalise & Perrin-Glorian, 1996; Dupin, 1995). Questa specifica teoria dei modelli nel campo della scienza cognitiva ha dato alcuni risultati interessanti che riassumiamo come segue.

1. Sebbene dati e procedure siano entità diverse, non sembra esserci una distinzione così profonda tra conoscenza dichiarativa e conoscenza procedurale.
2. Poiché la descrizione di un oggetto (vedi il caso della cosiddetta matematica elementare, cioè quella matematica che si occupa della fondazione degli elementi costituenti la matematica) non può non tenere conto della sua funzionalità, sappiamo oggi che la costruzione di un modello mentale relativizza la fase di costruzione di una conoscenza anche specifica.

Insomma: non sappiamo che cosa sia davvero un concetto matematico appena esso è stato definito solo verbalmente, cioè oralmente o per iscritto, finché non lo vediamo "in azione", non lo vediamo usato. Solo allora tendiamo a farcene un modello. E ciò vale in generale.

La teoria dei modelli di Johnson-Laird è stata in grande auge, anche critica, specialmente nel mondo della ricerca in psicologia, fino a fine secolo XX; è auspicabile che essa non venga del tutto dimenticata dal mondo della DdM e dagli studiosi di teoria dell'apprendimento, più in generale. I contenuti di questi studi e quelli di Bara (1990) ci sembrano ancora meritevoli di profonda attenzione da parte di quegli studiosi che intendono occuparsi dei fondamenti della DdM.

2.2. Immagini, rappresentazioni mentali e modelli: altre interpretazioni

Molti autori degli anni '90 non fanno troppa differenza tra:

- modello di una situazione;
- rappresentazione mentale di una situazione;
- immagine di una situazione.

Per questi autori, il termine *immagine*, riferito a situazioni, ma anche a concetti, significa quel che per molti altri è *modello* o rappresentazione mentale. Per lo più, essi fanno riferimento a lavori iniziati a partire dal 1971 nei quali Piaget e Inhelder (1966) proposero una distinzione tra:

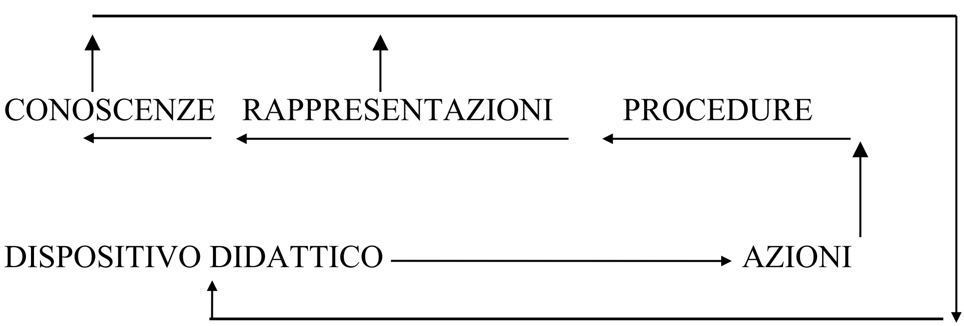
- immagini *riproduttive*, tese a evocare oggetti in situazioni ed eventi noti;
- immagini *anticipatorie*, che rappresentano oggetti costruiti solo mentalmente.

Secondo molti di questi autori, tali immagini sono visive, figurali e costituiscono il punto di partenza nell'attività di concretizzazione dei pensieri evocati dai simboli verbali e dai simboli matematici, trattati come se fossero oggetti concreti. Si intende come queste *immagini* siano qualche cosa in più di ciò che comunemente si indica con questo nome in forma ingenua, ma meno di quel che è un modello per i cognitivisti; o tutt'e due le cose, confuse insieme. Per sostenere questo punto di vista, Jean Piaget e Bärbel Inhelder ricercarono testimonianze e conferme da parte di matematici e ne trovarono, a loro avviso, soprattutto in Henri Poincaré e Jacques Hadamard.

Lungo il corso dell'ultimo decennio del XX secolo, gli studi sulle rappresentazioni si sono intensificati, proprio per quanto concerne la DdM, spesso a partire da Shepard (1980). Per esempio, in un lungo lavoro dedicato all'analisi didattica di protocolli di allievi, Brun e Conne (1990) propongono:

> Per rappresentazione noi intendiamo i contenuti organizzati del pensiero a proposito delle situazioni trattate. Conoscenze dell'allievo e situazione sono due aspetti di una stessa funzione che, mettendole in rapporto, rinforza il carattere interazionista della formazione delle conoscenze (Saada-Robert, 1989). Prendendo le rappresentazioni come oggetto di studio, lavoriamo su questo stesso rapporto, cioè l'unità funzionale che permette di comprendere l'acquisizione delle conoscenze in situazione, al posto di separare i due termini (conoscenza, situazione) e poi cercare di farli interagire. La rappresentazione è questa funzione che si fa carico delle interazioni tra conoscenza e situazione. (Brun & Conne, 1990, p. 266)

Le rappresentazioni dunque giocano un ruolo di decisiva importanza nel processo di conoscenza, e interagiscono con esso, tanto che, in uno schema nel quale Brun e Conne (1990, p. 267) vogliono far cogliere i rapporti tra conoscenze dell'allievo e situazione in una prospettiva di apprendimento, le rappresentazioni hanno un ruolo che sembra essere determinante:



Uno studio estremamente approfondito dell'idea di *rappresentazione* è diffuso in tutta l'opera di Raymond Duval, fin dai primi anni '90. Anzi, è a partire da questi primi studi che noi abbiamo cominciato ad approfondire il tema in una reale prospettiva di DdM. Ma non diamo in questo caso la bibliografia secondo criteri storici, dato che in alcuni lavori recenti lo stesso autore ha talmente perfezionato la questione che ci pare valga la pena affrontarla direttamente in essi (Duval, 2015, 2016, 2017). Una nostra analisi dell'articolo citato come Duval (2016) mette in evidenza lo sviluppo degli studi specifici di Duval su questi temi (D'Amore, 2016).

Altre recenti ricerche di estremo interesse hanno mostrato quanto sia duttile e profonda la scia sulla quale Duval ha lasciato un solco indelebile di un'estrema profondità. Suggeriamo la lettura di Iori (2017, 2018). Nel primo testo si affronta il problema, fondamentale per la DdM, della distinzione fra un oggetto di conoscenza specifica di tipo matematico e le sue rappresentazioni, facendo riferimento soprattutto alla teoria dei registri di rappresentazione semiotica, principalmente all'approccio semio-cognitivo di Duval. La seconda ricerca si focalizza sugli insegnanti e sulla loro consapevolezza dell'uso di aspetti semiotici nel corso del processo di insegnamento-apprendimento della matematica, evidenziando quale sia il livello di consapevolezza di tale uso; per far ciò, oltre all'approccio semio-cognitivo di Duval, l'autrice ricorre all'approccio semiotico-interpretativo pragmatico di Peirce. I risultati sono di estremo interesse, anche concreto.

Nel mondo della psicologia, che venne assunto come base dagli studiosi di didattica, oggetto e rappresentazione venivano distinti negli anni '70 e '80, proseguendo nel solco tracciato da René Descartes, Gottfried W. Leibniz, Immanuel Kant, Georg W. F. Hegel ed Edmund Husserl, a seconda della intenzionalità della produzione (Paivio, 1971, 1986):

- produzione *intenzionale*;
- produzione *automatica*.

Nel primo caso si possono avere rappresentazioni semiotiche che a loro volta si distinguono in *non analogiche* (linguaggi, codici) e *analogiche*. Le *non analogiche* possono essere:

- *a contesto interno* (enunciati, discorsi: essi articolano diversi livelli di organizzazione a seconda delle differenti funzioni discorsive);
- *senza contesto interno* (come liste, formule, sequenze, tabelle).

Le *analogiche* possono essere:

- *a significato interpretativo da determinare* (come schemi, grafici cartesiani, carte o mappe, figure geometriche);
- *a significato visuale autonomo* (immagini: come schizzi, ritratti, caricature).

Nelle rappresentazioni a produzione automatica abbiamo soprattutto immagini che sono riproduzioni *immediate* (cioè non motivate) o *motivate* dal tentativo di imitare un modello:

- Nel primo caso possono essere *esterne* (riflessi, foto, tracce, impronte, insomma: fenomeni fisici o meccanismi tecnici), o *interne* (sogni, ricordi).
- Nel secondo caso abbiamo vari tipi di immagini che sfruttano appunto il

desiderio e la capacità di imitare modelli voluti; possono essere oggetti, immagini numeriche o altro.

Duval insiste molto sulla necessità di non confondere il contenuto di una rappresentazione con l’oggetto che essa rappresenta, come a volte capita nelle rappresentazioni di oggetti matematici. Il che non è senza sovrapposizione a quel che di analogo accade nel guardare opere d’arte, come lo stesso Duval mostra (Duval, 2018).

2.3. Modelli nel senso di schemi

Quando si dice *modello*, però, altri autori intendono una cosa ancora diversa: intendono *schema* di qualche cosa. Ora, sugli schemi si potrebbe divagare moltissimo. Basti pensare agli *schemi* nel senso di Vergnaud (1990): una totalità dinamica organizzata.

Si pensi che in francese esistono due parole diverse per dire “schema”: *schéma* e *schème*. Il primo si riferisce agli aspetti grafici, simbolici, un “riassunto grafico” che sta per un oggetto o una situazione reale; il secondo è un termine più filosofico o psicologico (schema concettuale, per esempio). Più in generale, si può intendere per schema

> un qualsiasi tipo di elemento organizzato, di struttura di informazioni, che è il prodotto dell’attività costruttiva della mente e che insieme dà alle successive attività di ricordo, di comprensione, di apprendimento uno specifico orientamento: nel senso più generale, un qualsiasi processo di costruzione, di interpretazione, di acquisizione delle conoscenze è determinato, nella sua modalità e nei suoi risultati, dagli schemi già esistenti. (Pontecorvo, 1983, pp. 330–331)

Si vede chiaramente come questa accezione di schema sia generale; essa raccoglie sia l’idea di schema come struttura di conoscenze che interagiscono fra loro, sia l’idea di schema come “strutture di dati che rappresentano concetti generici conservati nella memoria” (Rumelhart & Ortony, 1977, p. 106). Gli schemi, in questa visione generale, devono avere le seguenti quattro caratteristiche:

- Gli schemi contengono *variabili*; in uno schema, cioè, ci sono entità (per esempio soggetti) che, pur avendo lo stesso ruolo, cambiano di ruolo o di senso a seconda della situazione specifica; oppure vi sono gli stessi soggetti, ma con funzioni diverse.
- Negli schemi possono esistere *sub–schemi*, cioè possono essere estrapolate parti che a loro volta costituiscono schemi; nello schema sulla risoluzione dei problemi proposto da D’Amore (1993, 2014), che apparirà tra breve, ci sono vari esempi di sub–schemi, com’è facile verificare; per questa sua complessità, è il motivo per cui lo scegliamo a mo’ di esempio.
- Gli schemi organizzano e modellizzano la conoscenza a vari livelli di astrazione e non solo a quello lessicale.

- Gli schemi chiamano in causa conoscenza e non costituiscono definizioni, sono cioè rappresentazioni di conoscenza e non solo esplicitazioni.

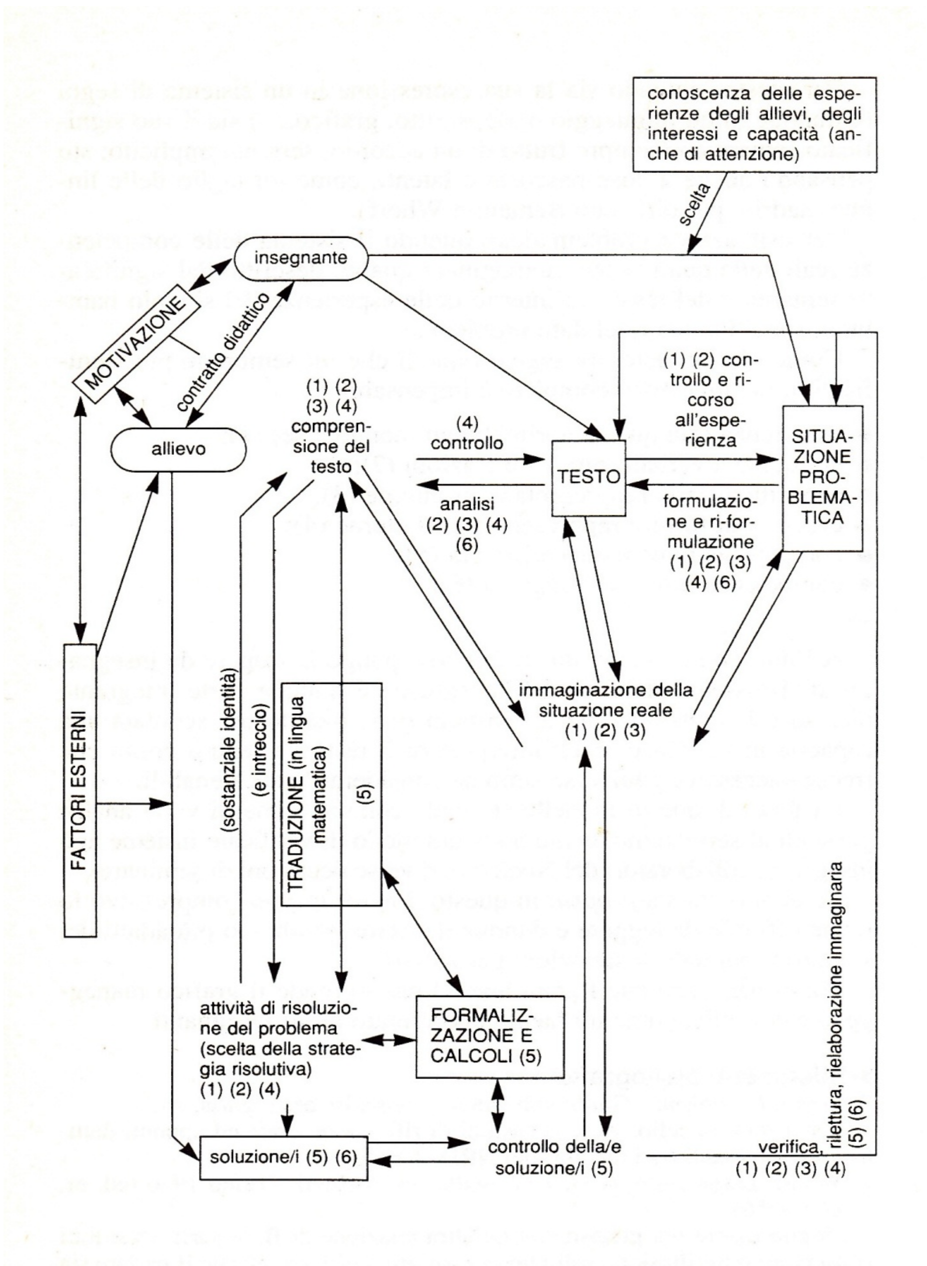


Figura 1. Esempio di schema di risoluzione di problemi.

Proponiamo in Figura 1, solo a mo' di esempio, lo schema ricordato sopra, tratto da D'Amore (2014, p. 223): qui lo schema è illustrativo, complesso, racchiude elementi statici e dinamici "e (...) dunque offre un mezzo utile per descrivere e porre in evidenza diverse componenti della risoluzione stessa e delle difficoltà che incontrano gli allievi” (D’Amore, 2014, p. 223). Naturalmente, nel testo citato tutti i termini che appaiono nello schema sono oggetto di dettagliata spiegazione.

Può essere interessante il fatto che, in precedenza, Rumelhart (1980), invece di tentare una definizione di *schema*, ne dia una descrizione attraverso quattro analogie:

- Gli schemi sono visti come *copioni* di testi teatrali; ogni esemplificazione dello schema è come una diversa modalità di rappresentazione di una determinata *pièce*.
- Gli schemi sono visti come *teorie* di tipo informale che ciascun essere umano si fa internamente, anche a carattere predittivo.
- Gli schemi sono visti come delle *procedure* di un programma di calcolatore.
- Gli schemi sono visti come *analizzatori linguistici* di enti o situazioni, strumenti per valutarne la correttezza e l’accettabilità.

Abbandoniamo il significato filosofico e psicologico di schema, e fermiamoci sull’idea di schema come rappresentazione (mentale ma soprattutto grafica) di qualche cosa. Se tale *cosa* è un oggetto (a maggior ragione se concreto), si può parlare di piano, di progetto, di grafico o altro (lo schema di un aereo, lo schema di funzionamento di un motore); se la *cosa* è una situazione, allora spesso si parla anche, in questo caso, di modello.

In uno schema-modello, il proponente deve cogliere gli aspetti essenziali di quel che intende dire o illustrare e creare un grafico che sia il più esplicativo possibile.

Ma ci sono in letteratura anche altre accezioni dei termini *modello* e *schema*, talvolta in opposizione tra loro; si trova spesso: *modelli di comportamento* - *schemi di comportamento*. A volte, a causa della differenza con i casi precedenti, questi modelli-schemi costituiscono una categoria a sé stante.

Tra tutti gli esempi possibili, scegliamo uno dei nostri esempi preferiti, tratto da lavori di Benjamin Whorf, il famoso antropologo statunitense.

Whorf (1956) teorizza una mancanza di libertà nell’atto del comunicare, dovuto a qualche cosa che chiama “il taglio delle lingue madri”. Questa suggestiva immagine è di straordinaria importanza, a nostro avviso, in tutti quegli studi connessi con le difficoltà che hanno gli studenti a esprimere in lingua naturale, materna, le proprie competenze matematiche: non solo ci sono obiettivi problemi di “traduzione”, non solo ci sono condizionamenti generali, immagini da rispettare, *frame* e *script* (termini sui quali torneremo a lungo fra breve); ci si mette di mezzo a mo’ di ulteriore ostacolo anche una costrizione dettata da profondi motivi antropologici ... Scrive Whorf (1940, p. 230) [il testo è riportato per intero in Hall (1959, p. 120)]:

> Noi tutti conserviamo un'illusione sull'atto del parlare, un'illusione che il parlare sia privo di costrizioni, spontaneo, e semplicemente "esprima" qualunque cosa desideriamo fargli esprimere. Questa apparenza illusoria deriva dal fatto che i fenomeni obbligatori all'interno del flusso apparentemente libero del discorso sono così completamente dispotici, che il parlante e l'ascoltatore sono legati inconsciamente come nella presa d'una legge di natura.

Ancora (Whorf, 1940, pp. 230–231):

> Noi selezioniamo la natura secondo linee tracciate dalle nostre lingue madri, le categorie e i tipi che isoliamo dal mondo dei fenomeni non li troviamo là perché sono lì, davanti agli occhi di ogni osservatore; al contrario, il mondo è presentato in un caleidoscopico flusso d'impressioni che deve essere organizzato dalla nostra mente. Noi facciamo a pezzi la natura, la organizziamo in concetti, e ciò soprattutto perché partecipiamo a un accordo di organizzarla in questo modo; un accordo che vale in tutta la nostra comunità linguistica ed è codificato negli schemi della nostra lingua. L'accordo è completamente implicito e non dichiarato, ma i suoi termini sono assolutamente obbligatori; non possiamo in alcun modo parlare se non sottoscrivendo l'organizzazione e la classificazione dei dati che l'accordo impone. Questo fatto è molto significativo per le scienze moderne, poiché vuol dire che nessun individuo è libero di descrivere la natura con assoluta imparzialità, ma è obbligato a certi modi di interpretazione anche quanto si ritiene più libero.

(Per un approfondimento sugli ultimi punti qui trattati, si può vedere D'Amore, 2017, 2018).

Fare modelli-schemi, per esempio, significa *sezionare* la natura, gli avvenimenti, le situazioni. Se non c'è libertà, ma i *tagli delle lingue madri* ci costringono a vedere le cose in un certo modo, l'apparente funzionalità di tali schemi non è legata all'oggettività che tutti auspichiamo e che ravvisiamo, in minore o maggior misura in essi, ma a retaggi antropologici o linguistici che ci *costringono* a riconoscere una sorta di oggettività laddove si tratta invece di impliciti accordi ancestrali.

Molte delle nostre convinzioni vacillano. E scopriamo così, con umiltà, che c'è ancora tanto da fare non solo per capire la realtà, ma anche solo per descriverla.

Riteniamo molto interessante la recentissima posizione di Vergnaud, uno dei primi e più profondi studiosi dell'idea di schema specifica per la DdM:

> Cominciamo dal concetto di *schema*; noi lo definiamo in base a quattro componenti:
> - uno o più scopi;
> - regole di azione, di assunzione di informazione e di controllo;
> - invarianti operatori; concetti-in-atto e teoremi-in-atto;
> - possibilità d'inferenza.
>
> (Vergnaud, 2017, p. 11)

È essenziale secondo noi non accontentarsi dell'idea di azione, per quanto essa sia importante: l'attività è in effetti piena di assunzioni d'informazione, necessarie sia per determinare le successive azioni sia per controllare la legittimità e il corretto sviluppo delle azioni già effettuate.

Gli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto) caratterizzano il contenuto concettuale delle regole effettivamente seguite e la loro adeguatezza se esse sono pertinenti; se non lo sono, gli invarianti operatori permettono di caratterizzare gli errori commessi in termini concettuali. Senza gli invarianti operatori, non sarebbe possibile comprendere la relazione fra le due componenti della conoscenza: la sua forma operatoria, che permette di agire in situazione, e la sua forma predicativa, che permette di enunciare gli oggetti di pensiero e le loro proprietà.

Le possibilità di inferenza sono a loro volta necessarie per comprendere da una parte le previsioni e attese dell'attività e, dall'altra parte, le ragioni alla base di nuove informazioni, decisioni d'azione, assunzioni di nuove informazioni, nuove azioni. L'attività è anche calcolo.

La somiglianza fra la definizione di *schema* e quella di *algoritmo* è evidente. Semplicemente, gli algoritmi sono degli schemi, ma non tutti gli schemi sono degli algoritmi. Si vede la loro complementarità in due casi molto importanti:

- Quando un allievo dimentica una parte di un algoritmo, per esempio della divisione, o una parte del ragionamento proporzionale, e la sostituisce con degli schemi personali.
- Quando un allievo affronta una situazione nuova per lui e non dispone di un algoritmo che lo possa aiutare; egli fa allora appello a tutte le sue risorse, cioè a quelle dei suoi schemi apparentemente promettenti.

2.4. Ancora su immagini e modelli

La discrepanza fra vari autori a proposito dei termini *immagine* e *modello* è denunciata anche dagli psicologi. Citiamo, per confermare la frase precedente, le parole di Vecchio (1992):

> Il termine "immagine mentale" è (...) ambiguo e, a seconda dell'interpretazione che ne viene data, ne risultano tradizioni di ricerca assai diverse, sia per i riferimenti teorici assunti che per le metodologie impiegate. (...) Ora, in inglese, il termine usato per designare le immagini mentali è "*imagery*", di cui non esiste un esatto corrispondente in italiano. La traduzione più vicina è "immagine" o anche "immaginazione", quest'ultima impiegata per indicare i processi di formazione e manipolazione delle immagini mentali stesse. Tuttavia in italiano questi termini oltre a riferirsi ad una particolare forma di rappresentazione mentale, quella figurativa-analogica, sono usati anche per indicare processi di pensiero di tipo intuitivo, legati alla fantasia, alla creatività, ed ai loro prodotti. Da quest'ultimo punto di vista si possono ritenere sinonimi parole come "fantasia", "fantasticheria". Quest'ambiguità è assente in inglese, dove si usano differenti verbi per i due processi: "*to image*" per indicare la rappresentazione figurativa e

> "*to imagine*" per designare la fantasticheria. (Vecchio, 1992, p. 18)

Nella famosa "definizione" di Holt (1964), un classico spesso preso a modello, si parla di *immagine mentale* nei seguenti termini:

> una rappresentazione debole e soggettiva di una sensazione o percezione senza un adeguato input sensoriale; [essa] è presente nello stato di veglia ed è conscia, come parte di un atto di pensiero (...) può essere uditiva, visiva, o di qualsiasi altra modalità sensoriale. (Holt, 1964, p. 257)

Le caratteristiche che sembrano predominanti in questa diversa concezione di immagine mentale sono dunque:

- la "debolezza", cioè una non del tutto marcata definibilità esplicita;
- la soggettività, cioè un forte legame con le caratteristiche e le esperienze individuali;
- la mancanza di un "adeguato" input sensoriale produttivo;
- l'esser parte di un atto di pensiero, dunque una non-esistenza in sé stessa, come ente unico;
- l'essere sensoriale, cioè legata ai sensi.

Forse è con Alan Paivio che inizia una vera e propria storia moderna del concetto di *immagine*; dopo il suo famoso *Imagery and Verbal Processes* (1971), dedicato soprattutto alla memoria e all'apprendimento verbale, Paivio elabora una teoria che va sotto il nome di *Ipotesi del Doppio Codice*, giungendo nel 1986 all'altra famosa opera *Mental Representations* (1986), nella quale presenta delle unità di rappresentazione di base, sia per le informazioni non verbali sia per le verbali, che chiama rispettivamente: *imagens* e *logogens*. In particolare, a noi qui interessano le prime; in esse

> si parla di organizzazione simultanea, nel senso che l'informazione codificata risulta simultaneamente disponibile per l'elaborazione e non è dunque vincolata ad una determinata successione temporale per quanto ne riguarda l'accesso e l'elaborazione. (...) L'elaborazione nel sistema non-verbale è essenzialmente parallela, operando su strutture che mantengono una relazione di analogia con ciò che è rappresentato. (Vecchio, 1992, p. 23)

Dunque l'immagine viene interpretata come una modalità specifica di rappresentazione della conoscenza. Ma ogni conoscenza individuale è a sua volta connessa alle precedenti conoscenze dell'individuo, alla sua esperienza del mondo circostante, alle modalità personali di mediazione della percezione.

Quest'ultimo punto è stato oggetto di critiche: in quanto legato alla percezione, il risultato dell'immagine sarebbe allora qualche cosa di "sfuocato" (l'aggettivo viene unanimemente fatto risalire a Jean Piaget). Per quest'ultimo l'immagine non deve essere intesa come un costituente del pensiero, ma come un suo supporto simbolico, uno strumento per eseguire operazioni (Piaget & Inhelder, 1966).

Accenniamo solo a un importante momento, quello in cui Kosslyn (1980), allo scopo di eliminare un dibattito allora in corso sulla contrapposizione tra forme di rappresentazione *analogica* e *proposizionale*, suggerisce l'idea di *immagine* come una forma di attivazione e utilizzazione di strutture di dati a disposizione dell'individuo. Forse è a partire da questo suggerimento che si elabora il modo moderno di vedere le immagini come un *processo* e non come un semplice *stato*; in particolare, l'immagine viene vista all'interno di studi sul ragionamento e sul *problem solving*; ci stiamo riferendo ancora ai profondi studi sui modelli mentali di Johnson-Laird (1983). E così torniamo a quanto detto nei paragrafi precedenti.

Le attività immaginative sarebbero dunque legate a delle *intenzioni* (scelte, decisioni, ..., soprattutto connesse con le attività di *problem solving*), il che conduce a considerare differenze individuali. Queste differenze individuali sono inoltre connesse all'efficacia con cui ogni individuo *sa utilizzare processi di base* e ciò porta alle condizioni per un ricorso spontaneo all'immaginazione nei compiti cognitivi, secondo gli studi di Katz (1983, 1987).

Quali sarebbero le abilità di base che contraddistinguono gli individui impegnati in attività cognitive, come gli studenti, relativamente alle immagini mentali?

Secondo Katz (1987) (che riprende precedenti studi e idee di Kosslyn, 1980), esse sono:

- abilità nel generare immagini mentali;
- abilità nel formare immagini mentali integrate;
- abilità nell'accesso alle immagini mentali;
- abilità nel mantenere in memoria le immagini mentali.

Ovviamente la ricerca specialistica in questo settore è stata sempre più rapida ed estesa e qui, lo ripetiamo, ci stiamo limitando a dare solo qualche rapida indicazione di massima, finalizzata esclusivamente agli scopi detti all'inizio del testo, una sorta di conservazione della memoria.

Un'applicazione di alcune di queste teorie alle abilità e alle modalità di conduzione nel risolvere problemi di matematica è già stata da noi parzialmente presentata in D'Amore (1993, 2014) dove c'è anche una bibliografia più specifica.

Quanto sopra e la distinzione fatta da più autori tra immagini mentali e modelli mentali, ci suggerisce (limitatamente a quanto riguarda le considerazioni relative a processi cognitivi nel campo della matematica) di tentare di raccogliere le sollecitazioni precedenti e di proporre la seguente terminologia, mediata da quanto detto finora.

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale o misto prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da esperienza personale, influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico del singolo individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dalle caratteristiche dell'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna e, almeno in prima istanza, involontaria, ma con la possibilità di una rielaborazione.

L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative a uno stesso concetto costituisce il *modello mentale* del concetto stesso. Il modello mentale di un concetto, dunque, riunisce in sé ciascuna delle immagini mentali che di quel concetto ci si sono fatte nelle diverse occasioni specifiche, sulla base delle condizioni dette.

Ma su questo punto dobbiamo invitare a un'ulteriore riflessione, perché il modello si può vedere o staticamente, come semplice insieme delle immagini; o meglio dinamicamente, come immagine-limite di un processo che costituisce una successione di immagini. Vediamo come.

Relativamente a un certo concetto, il soggetto sembra farsi immagini via via più generali, comprensive e circostanziate, accogliendo ogni volta dettagli, informazioni, proprietà più estese; dunque abbiamo un vero e proprio *processo dinamico* che consta di una successione di immagini mentali; il *modello mentale* (cognitivo) sarebbe allora il "limite" di questa successione di immagini, al momento in cui esse, pur con le sollecitazioni relative a proprietà sempre più generali, non richiedono più la formazione di immagini *nuove*; dunque il modello mentale sarebbe il risultato finale del processo delle immagini mentali, quando una di queste diventa stabile.

Con questa interpretazione (nel solo campo del cognitivo, come abbiamo più volte detto, e del cognitivo specifico del campo matematico, come pure abbiamo più volte detto), si spiegherebbe la relatività della creazione di immagini mentali via via *accomodate*, sulla base di sollecitazioni dell'insegnante. Hanno qui senso gli studi sul conflitto cognitivo (D'Amore, 1999); sulla formazione di nuove immagini; sulla formazione di modelli (stabili e dunque resistenti a eventuali nuove sollecitazioni).

Dal punto di vista didattico, la cosa potrebbe essere detta come segue e avere allora ancora oggi un certo qual interesse.

L'immagine mentale suscitata dalla presa in carico cognitiva di un concetto matematico dà un'informazione che tiene conto della cultura individuale, dell'esperienza personale e delle competenze generali dell'individuo (ma anche di una sua capacità specifica di farsi immagini: e questa capacità potrebbe essere oggetto di attenzioni da parte dell'insegnante); essendo almeno in prima istanza involontaria, l'immagine mentale si forma per semplice associazione verbale o iconica, o altro. A seguito di successive sollecitazioni, può capitare che si abbia contrasto tra l'immagine formatasi spontaneamente e la sollecitazione stessa; in questi casi si può avere conflitto cognitivo. Sta allora all'individuo mettere in moto le proprie *abilità* in questo campo (nel senso di Katz, 1987) ed elaborare l'immagine fino ad *accomodarla* alla nuova situazione, determinata dalla sollecitazione (per esempio del docente nei riguardi degli studenti). Si giunge così a una nuova immagine che possiamo chiamare successiva alla precedente perché più comprensiva di questa. Questo processo può ripetersi più e più volte, ottenendo così una successione di immagini mentali che accompagnano le sollecitazioni suscitate attorno a un concetto (D’Amore, 2001a, b).

Ma ci sarà un momento in cui l’ultima immagine mentale relativa a quel concetto non ha più bisogno di essere seguita da (cioè accomodata a) una *nuova* perché non viene più provocato alcun conflitto: le nuove sollecitazioni trovano nell’ultima immagine mentale piena legittimità e totale rispondenza. Il soggetto allora trasforma (ovviamente inconsciamente) l’immagine mentale associata a quel concetto in un modello mentale (stabile) di esso.

Da un punto di vista didattico-cognitivo non è detto che il modello si formi al momento culturalmente o cognitivamente giusto (dal punto di vista del sapere matematico o dell’esplicita volontà didattica dell’insegnante). Non è detto cioè che l’immagine mentale diventi modello mentale (stabile) quando davvero il concetto è acquisito in modo consono alla sua natura matematica cioè quando il concetto è esattamente quello atteso all’interno del sapere matematico istituzionale atteso. Può succedere cioè che anzitempo, rispetto alle necessità di correttezza matematica, si formi un modello (per esempio un modello intuitivo ingenuo come quello famoso della moltiplicazione che accresce: $a \times b > a$ e $a \times b > b$, non importa quale sia il dominio numerico di a e b; o per esempio un modello parassita, non desiderato) (D’Amore, 1999; ci si ispira ad alcuni classici lavori di Fischbein, 1985a, b). Ciò crea problemi didattici in quanto, se è relativamente facile “rompere” un’immagine mentale (instabile) e accomodarla a una nuova più comprensiva e corretta nei riguardi del sapere, dato che si tratta di un processo in atto e non di qualcosa di stabile, più complesso è distruggere un modello mentale (stabile) per far posto a un altro, dello stesso concetto.

Per semplicità potremmo pensare che lo studente preferisce allora (sempre in modo non cosciente, beninteso) avere due modelli diversi per due concetti a suo avviso diversi, anche se essi dovrebbero essere, dal punto di vista del sapere matematico, conglobati nello stesso modello concettuale. È per esempio questa la situazione evidenziata da Fischbein a proposito della moltiplicazione (Fischbein, 1985b), tanto per proseguire nello stesso esempio, per la quale nella mente di alcuni studenti sembrano aversi due distinti modelli: un modello per la moltiplicazione fra naturali (quella che effettivamente *accresce*, a parte i casi 0 e 1) e un modello per un’*altra* moltiplicazione (quella assai più complessa da gestire, tra numeri razionali, espressi mediante frazioni o scritture con la virgola).

Tutto ciò sembra costituire una semplificazione notevole del problema, soprattutto per gli aspetti cognitivi e didattici (che sono poi quelli che ci interessano) e ci sembra ragionevole per il nostro scopo. Dal punto di vista della ricerca in DdM, i precedenti passi ci sembra spieghino piuttosto bene e in un modo unico varie questioni che altrimenti appaiono piuttosto complicate e intricate. A compiere questa riduzione si è rivelato utile lo studio di Kaldrimidou (1987).

Nota 1.
È possibile delineare un confine netto tra immagine mentale e rappresentazione semiotica? La rappresentazione semiotica ha senso in una struttura segnica, mentre l'immagine mentale è

> una rappresentazione debole e soggettiva di una sensazione o percezione senza un adeguato input sensoriale; [essa] è presente nello stato di veglia ed è conscia, come parte di un atto di pensiero (...) può essere uditiva, visiva, o di qualsiasi altra modalità sensoriale. (Holt, 1964, p. 257, già citato anche in precedenza)

Molto sembra dipendere dalla complessità; cioè: se l'analisi si limita ai segni elementari, immagine mentale e rappresentazione semiotica sembrano quasi coincidere (si pensi ai segni dei numerali romani: l'iconicità è massima).

L'interesse per questo tema vale in generale, non in modo specifico per la matematica, dato che l'inaccessibilità percettiva degli oggetti matematici costringe a mettere subito in gioco le rappresentazioni semiotiche e le immagini mentali sembrano essere necessariamente soggette a quelle, a una loro elaborazione. Riteniamo che su questo punto ci sia ancora parecchio da lavorare.

2.5. Modelli mentali "interni" degli studenti. Modelli "esterni"

A scopi didattici, sarebbe assai utile conoscere il modello mentale (che si usa chiamare "interno") che gli studenti hanno dei vari concetti matematici. Se questo fosse possibile, l'insegnante potrebbe attivare strategie didattiche personalizzate adatte e modificare così i modelli che ritiene non perfettamente adeguati al sapere matematico, cercando poi il modo di farli adottare dallo studente. Ma risalire al modello mentale che un individuo si fa di un concetto è impresa ardua se non addirittura impossibile.

Anche se e quando l'individuo vuol commentare a sé stesso il proprio modello mentale, lo fa in una *lingua interna* o *linguaggio interiore*, assolutamente personale e privo di regole lessicali (Vygotskij, 1990).

Se lo studente intende o deve (per esempio nel corso di un'interrogazione orale o nelle risposte a un test scritto o nel rispondere a un'intervista) comunicare all'esterno il proprio modello mentale relativamente a un concetto, allora è costretto a "tradurlo" in qualche cosa di "esterno" [quale che sia il linguaggio nel quale comunicherà il risultato: verbale (orale o scritto), non verbale (grafico, iconico, figurale, mimico, gestuale, ...)]. Dunque un modello esterno di un concetto personalmente costruito è la sua proposta comunicativa *consapevole* in una qualche forma di linguaggio, proposta fatta per necessità di (o per desiderio di) comunicare.

Abbiamo usato consapevolmente il verbo "tradurre" perché si tratta di una vera e propria *traduzione* e molta ricerca degli anni fine '80 e inizio '90 si è occupata dei modi nei quali avviene tale traduzione e delle influenze che hanno fattori quali personalità, stile cognitivo, ambiente eccetera su alcune caratteristiche di essa (per esempio la *lingua interna* e la *conoscenza tacita*) (Bara, 1990, cap. 5; D’Amore, 1993, 2014).

Molti sono gli studi compiuti a proposito di tale *traduzione* ed è stata rilevata in essa, per esempio, una forte prevalenza di una modalità iconica rispetto a una verbale (Johnson-Laird, 1972). In base a questi esperimenti, fu mostrato che, solo dopo una fase di familiarizzazione con il testo di un problema, il risolutore potenziale passa da una fase visiva a una linguistica. Seguendo le parole di Pellerey (1984), ciò costituisce “la controprova di quanto individuato da Haslerud e Meyer e cioè l’influsso inibitorio prodotto da un eccessivo uso della verbalizzazione nella fase della soluzione di un problema” (p. 449).

Il celeberrimo psicologo statunitense Jerome Bruner ha dato un’interessante versione di questa problematica, ritornando a un’idea originale di Piaget, secondo la quale lo sviluppo del bambino comporta successive ristrutturazioni di fatti e relazioni; queste hanno origine e si manifestano attraverso interazioni tra pari, con l’ambiente e grazie a interventi che i bambini fanno sull’ambiente. Ma: come si rappresenta tutto ciò nella mente del bambino? Negli anni ’60 Bruner (1960, 1964a, 1966) studiò il problema giungendo a sostenere che i bambini si fanno una vera e propria *rappresentazione cognitiva*. Essa fu studiata da Bruner (1964b) proprio nel caso specifico della matematica e del *problem solving* matematico. Egli distingue tre modi di rappresentazione:

- *Esecutiva*: si rappresentano eventi passati con un atto motorio, come quando il bambino agita la mano vuota in ricordo di un sonaglio; secondo Bruner, questo è il motivo per cui si è capaci di condurre una bicicletta anche dopo anni che non lo si fa.
- *Iconica*: passiamo dal concreto del reale al mondo delle immagini mentali astratte: il bambino ricorda, cioè re-immagina, una manipolazione concreta eseguita; si tratta di un riassunto mentale di eventi reali; altro esempio: un adulto che dà indicazioni su un percorso a uno straniero, immaginando sé stesso nel compiere tale percorso; oppure la ricostruzione di una successione ordinata di oggetti pensata ma non concretamente realizzata.
- *Simbolica*: rappresentazione di qualche cosa con puri simboli, per esempio cinque oggetti con la parola *cinque* o con il simbolo aritmetico *5*; questo è il livello più alto, quello di solito richiesto in matematica fin dai primi giorni di scuola: l’entrata in contatto con queste rappresentazioni dà all’allievo una nuova possibilità di pensiero astratto.

Secondo Bruner (1964a, b, 1966) questi *modi della rappresentazione* avvengono e si sviluppano proprio in questa successione e ciascuno è la base cognitiva necessaria per il successivo, e anzi sono tra loro collegati in modo evolutivo.

A prima vista, sembra esservi coincidenza con una teoria dell'evoluzione cognitiva a stadi, alla Piaget. Ma non è così; mentre l'insegnante che segue la teoria piagettiana quando verifica che l'allievo non è ancora nello stadio adatto a una certa attività o a un certo concetto non può far altro che aspettare, l'insegnante alla Bruner è invitato dallo stesso ad affrontare qualsiasi tema. Secondo Bruner, ogni concetto è apprendibile da allievi di qualsiasi età, se lo si riesce a rappresentare in quei tre modi nell'ordine. Per dimostrare ciò, è ben noto che egli si lanciò in avventure didattiche che lo portarono a sviluppare discorsi algebrici di una certa complessità già nella scuola primaria. Naturalmente la nostra frase cautelativa precedente ("se lo si riesce a rappresentare in quei tre modi") è di vitale importanza per capire il senso della proposta di Bruner …

Gli studi di Bruner non sono mai stati del tutto abbandonati, anche se sono stati oggetto di critiche, soprattutto legate sia alle modalità di passaggio dal modello interno a quello esterno, sia alle modalità di rappresentazione dei modelli esterni.

Per la DdM, questo tipo di temi ha grande interesse, dato che tutta la comunicazione matematica avviene attraverso modelli esterni. Detto in altre parole, non sapremo mai qual è il modello mentale (interno) che un determinato allievo si è fatto, per esempio, delle tre altezze di un triangolo. Se anche glielo chiedessimo, non otterremmo altro che il risultato di quella *traduzione* di cui dicevamo sopra, cioè una qualche forma di modello esterno; dopo di che, ri-tradurre in senso inverso per risalire al modello mentale interno di quell'allievo è impossibile ... Nel corso di colloqui o di interviste, a causa di alcune clausole del contratto didattico o del contratto sperimentale (D'Amore, 1999), l'allievo non solo non potrà che dare modelli esterni, ma anzi cercherà di dare modelli esterni falsati dal desiderio di renderli vicini a quelle che ritiene essere le attese dell'insegnante o del ricercatore, più che al suo modello interno (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

Tramite tecniche di indagine piuttosto sofisticate, però, si riesce a far sì che lo studente si svincoli dal rapporto con l'insegnante-valutatore e dall'immagine dell'aula come luogo di … ricerca del consenso adulto. Se lo studente accetta di esprimersi in un linguaggio naturale, per esempio come se dovesse rivolgersi a un bambino più piccolo per spiegargli con le sue parole che cosa sono le altezze di un triangolo (tanto per proseguire con il precedente esempio), in situazione non di routine, semmai in assenza dell'insegnante e con l'accordo che il suo lavoro non sarà oggetto di valutazione, allora si possono avere informazioni che, senza ingenuamente pensare siano la descrizione esatta del modello mentale (interno), sono però piuttosto personali, profonde e rivelatrici.

A proposito dell'esempio, *non* scelto a caso, ecco come una ragazza di II media (grado scolastico 7, dunque di 12–13 anni), fingendosi adulta e mamma, spiega a un supposto figliolo di 7 anni perché i triangoli hanno tre altezze [il testo è riportato integralmente, così come appare sul protocollo originale, conservando un piccolo errore dell'autrice]:[1]

> Simona: "Figlio mio, la geometria tu non la conosci però voglio spiegarti che cosa vuol dire altezza. Come te, io, e papà abbiamo un altezza, che si misura dalla testa ai piedi, anche i triangoli ne hanno una, però la loro si misura dal vertice che è un puntino fino alla base che sono come i nostri piedi. Però dato che loro hanno 3 puntini (vertici), hanno tre altezze perché hanno i nostri 3 paia di piedi. E dato che noi abbiamo una sola testa e un sol paio di piedi, abbiamo solo un'altezza". (D'Amore & Sandri, 1996, p. 239)

Ora, non è affatto detto, ovviamente, che il modello mentale di Simona sia quello antropomorfo che si potrebbe indurre dalla sua efficacissima descrizione a parole (sarebbe oltremodo ingenuo ragionare così …); ma certo ottenere questo tipo di modello esterno in forma verbale scritta richiede attenzioni pedagogiche notevoli e ci dà molte informazioni su come Simona si è immaginata una … soluzione figurata cognitiva (un opportuno modello) per accettarlo. (La ricerca completa è descritta in: D'Amore & Sandri, 1994, 1996).

Studi sui modelli esterni sono stati molto sviluppati e diffusi negli anni '90; per le sue intrinseche difficoltà, invece, furono scarsi gli studi sul legame tra modello mentale (interno) e modalità della sua traduzione in un modello esterno. Essi sarebbero invece di grande rilevanza per la DdM (e forse l'interesse potrebbe essere assai più generale).

2.6. Frame e script

Ci sembra doveroso, in una riflessione sui modelli, inserire almeno poche righe su *frame* e *script*, termini che hanno dominato gli studi e le ricerche all'inizio della DdM negli anni compresi fra il 1970 e il 1990, per poi lentamente eclissarsi.

Nello studio delle varie teorie dell'educazione, un ruolo spesso trascurato, ma di rilevanza notevole soprattutto per chi si occupa di didattiche specifiche, riguarda la *natura dei contenuti* e la loro *modalità di presentazione*. Ora, per quanto concerne questo secondo aspetto, si può ricorrere a qualche sequenza, per esempio dettata da *gerarchie di apprendimento*, come suggeriva un primo Gagné (1965, 1985)[2] o da qualche tassonomia (ce ne sono tantissime datate

---

[1] Riportiamo il testo esatto che costituiva la consegna: "Fa' finta di essere una mamma ... Il tuo bimbo, che ha 7 anni, ha sentito dire che ogni triangolo ha tre altezze e ti chiede: 'Mamma, che cosa vuol dire?'. Niente di peggio che eludere la domanda di un bambino piccolo; dunque, tu decidi di rispondergli". Erano dati 5 testi-consegne diverse a ogni classe, distribuite a caso tra gli allievi (D'Amore & Sandri, 1996, p. 230).

[2] Va detto che Robert Gagné pubblicò questo stesso libro una prima volta nel 1965 con la Holt, Rinehart & Winston Inc. (noi però consultiamo la successiva ristampa inalterata del 1973). Nel 1985 lo ripubblicò profondamente modificato nella concezione generale, ma con lo

’70 e ’80, ma oggi sono del tutto scomparse); oppure si può ricorrere a una presentazione organica di concetti generali, in qualche modo anticipatoria, come suggerisce Ausubel (1968).

Tra le tante possibili modalità, Bateson (1972) insiste sulla funzione dei *frame* come vere e proprie *cornici* atte a … inquadrare diversi contenuti comunicativi; tali contenuti possono essere offerti dalle culture scientifiche e costituiscono modalità di analisi che sono condivise nell’ambito di una stessa comunità anche e soprattutto se utilizzate all’interno della formazione dei futuri docenti (tema assai scottante allora e tutt’oggi, diventato addirittura tema di ricerca scientifica).

Riprendendo Chafe (1977), un’attività di *framing* è un’attività di riduzione in schemi nella quale un insegnante (ma la cosa vale anche più in generale) sceglie la modalità generale di esposizione di un argomento; dunque sceglie una sequenza, e decide che cosa e come esporre. Naturalmente la cosa si può invertire e, invece di vederla solo nel verso *insegnamento*, la si può vedere nel verso per così dire opposto, *apprendimento*. Vi torneremo tra breve.

L’idea di *script* (letteralmente: *copione*, di teatro o di film) è stata introdotta da Schank e Abelson (1977). In parole semplici, si tratta di quanto segue. Chi impara non è del tutto privo di conoscenze sul tema *nuovo* che l’insegnante intende proporre iniziandolo da capo. In realtà c’è un contenuto-contesto al quale qualsiasi competenza fa riferimento, al momento della proposta da parte dell’insegnante, nella mente dell’allievo. Ci sono allora delle *strutture di aspettativa*, cioè degli *schemi anticipatori*. Quando queste strutture, questi schemi, sono di tipo procedurale, allora assumono il nome di *script*. Un esempio che abbiamo sentito fare a voce da un autorevole psicologo è relativo all’apprendimento di modalità di comportamento da parte di un bambino in un’occasione pubblica. In una precedente occasione, il bambino ha vissuto, evento per evento, tutti i momenti di una successione che costituisce per lui questa occasione pubblica, per esempio: mangiare con genitori e amici dei genitori al ristorante. In una nuova occasione analoga, il bambino arriva all’appuntamento essendosi già costruito un’immagine – aspettativa di quel che accadrà. Si è cioè già *scritto* (per così dire) un copione della serata.

Quella qui sopra presentata è addirittura talvolta usata come tecnica didattica da parte di insegnanti specializzati (cosiddetti “di sostegno”, in Italia) per aiutare quegli allievi in difficoltà che fanno fatica a capire com’è organizzata la giornata scolastica e che dimostrano ansia in classe, proprio legata alla mancanza di comprensione di tale organizzazione. Spesso questi allievi sono tesi, finiscono con l’essere elemento di disturbo, ma solo perché non sanno contenere l’ansia derivante da una mancanza di previsione a breve

---

stesso titolo, con la Cbs College Publishing, mentre la traduzione oramai avviata da anni, in italiano, era stata condotta sulla prima edizione, e uscì solo nel 1987. Per cui uscì in italiano solo il primo Gagné, mentre negli USA egli aveva rivisto totalmente la sua posizione. Su tutto ciò in dettaglio, si può vedere D’Amore (1993, 2014).

termine. Sappiamo allora che taluni insegnanti creano un'agenda-calendario orario, fanno sì che l'allievo se ne appropri, e ne calmano le ansie: hanno creato un copione della giornata scolastica disponibile per un controllo costante.

Secondo alcuni, l'apprendimento stesso potrebbe essere ripensato come attività di creazione di *frame* e come capacità di modificare *script*. Non c'è in fondo una grande differenza tra *frame* e *script*: in entrambi i casi c'è una sorta di struttura cognitiva d'attesa:

- relativa a una sorta di inquadramento generale, nel caso dei *frame*;
- relativa a procedure più specifiche (per esempio una successione di eventi già vissuti) nel caso degli *script*.

Da un certo punto di vista, *frame* e *script* rappresentano qualche cosa di molto vicino a immagini, rappresentazioni e modelli mentali. Negli anni '80 si era creata l'idea che l'attività di apprendimento matematico potesse essere rivisitata anche in funzione di questi concetti (Pontecorvo & Pontecorvo, 1985).

Il termine *frame* ha anche un'altra origine, quella proposta da Minsky (1975) in ambiente di intelligenza artificiale; si tratta di "una struttura di dati che serve a rappresentare una situazione stereotipata quale stare in un certo tipo di soggiorno o andare al compleanno di un bambino" (p. 230).

In realtà, anche in questo caso si tratta di uno schema di attese che, proprio per come è descritto, in termini di "rete di nodi e di relazioni", rientra tra gli schemi (termine da noi già usato finora in modo intuitivo, ma sul quale dovremo tornare tra poco).

Sempre allo scopo di ricercare gli anticipatori di questa idea, ricordiamo che anche Winograd (1975) fa uso di questo termine in ambito di rappresentazione della conoscenza, nel descrivere una gerarchia del legame tra giorni e date, quando afferma che "associato ad ogni nodo della gerarchia c'è un *frame* che tiene insieme la conoscenza che abbiamo di quel concetto" (p. 191).

Si può dunque concludere dicendo che, giungendo dagli ambiti di ricerca più disparati, ma non tutti lontani dal mondo dello studio del cognitivo, l'idea di *frame* è giunta a Schank e Abelson che, come abbiamo visto, nel 1977 l'hanno introdotta nell'ambito della psicologia della conoscenza, e ha fatto poi capolino negli anni '80 nel mondo della DdM.

Torniamo ora a una problematica molto concreta, assai più vicina al mondo della scuola. È stata a lungo oggetto di dibattito la seguente questione: Immaginarsi la scena descritta dal testo di un problema (pensando il testo nel suo registro "narrativo"), aiuta nella risoluzione oppure ciò è indifferente? Cioè: Fino a che punto deve spingersi la verosimiglianza tra quel che è descritto o richiamato nel testo e la realtà immaginata, sollecitata dalla lettura del testo, al momento della risoluzione del problema?

Molti ricercatori sembrano concordare negli anni '80 sul fatto che vi *debba* essere una buona immaginazione e che, anzi, essa risulti a volte indispensabile per la risoluzione. Stiamo pensando a Johnson-Laird (1983), a Vergnaud (1985), a Paivio (1986) e ad altri.

Questo genere di domande, a nostro avviso, riguarda sia concetti generali di modelli (in più d'uno dei sensi delineati in precedenza), sia *frame* e *script*, perché la lettura del testo di un problema, se considerato come testo narrativo, spinge a ideare una situazione nella quale il risolutore può rivedere sé stesso o rivedere qualche cosa di esperienzialmente già vissuto o potenzialmente tale. Per esempio, risolvere i famosi problemi di addizione proposti da Vergnaud (1985) costringe a ideare una situazione personale concreta che coinvolge il risolutore come persona fisica, altrimenti risulta impossibile, almeno nella scuola primaria.

Ricerche molto approfondite hanno però ampiamente dimostrato che tale legame non c'è o, per lo meno, non è così vincolante e diretto. Per esempio, l'ipotesi secondo la quale la presenza di parole incognite nel testo, inibendo la possibilità di farsi immagini mentali circoscritte e dettagliate della situazione (cioè veri e propri *script*), riduca la percentuale di risoluzioni esatte del problema, è certamente falsa. Si vedano i risultati della ricerca sulla risoluzione dei problemi nei quali appaiono parole inesistenti, come "orettole" e altre (D'Amore, 1997): lo studente risolve ugualmente il problema, attribuendo a quella parola altri significati, per assonanza o con colpi di fantasia.

Immaginarsi la situazione descritta dal testo di un problema e utilizzare tale immagine per risolvere il problema è dunque una faccenda assai più complicata di quanto possa apparire; l'immagine della situazione descritta non ha necessità di dettagli, di rifarsi a modelli realistici, ma può anche limitarsi a situazioni vaghe, sfumate, anche non realistiche. Naturalmente viene in mente la "debolezza" di Holt (1964), il fatto di essere di fronte a qualche cosa di "sfuocato", così come diceva in tante occasioni Piaget.

Le prove di nostra conoscenza sono state fatte non solo con studenti di scuola primaria (gradi scolastici da I a V), ma anche di scuola media (gradi scolastici fra VI e VIII), con risultati del tutto simili. Una frase ci ha fatto riflettere molto. In una delle volte in cui, come intervistatori forse esageratamente espliciti, abbiamo cercato di indagare più a fondo su questa faccenda, intervistando allievi, di fronte alla nostra insistenza a cercare di capire che cosa uno studente dodicenne si fosse immaginato di una situazione descritta nel testo di un problema facendo uso di parole senza senso, questi, spazientito, ci ha detto che lui non si era immaginato niente perché: "L'importante non è capire, ma risolvere il problema", il che la dice lunga sulla situazione che la matematica vive in aula. [Per avere maggiori dettagli su questa ricerca e sulla connessione con il tema dei problemi in aula nel corso di attività didattica, si veda: D'Amore (1993, 1997, 2014) e D'Amore e Fandiño Pinilla (2006a)].

L'attualità di queste analisi e il proliferare tutt'oggi di ricerche su questi temi ci convince che le precedenti proposte terminologiche non sono oggi del tutto fuori luogo.

2.7. *Frame e script*

I processi cognitivi organizzano l'attività e il suo funzionamento in situazione: cioè la condotta, la rappresentazione, le competenze definiscono e determinano lo sviluppo delle forme di organizzazione dell'attività di un soggetto nel corso della sua esperienza. Dunque, i processi cognitivi non riguardano solo il funzionamento in situazione, ma anche lo sviluppo, cioè l'evoluzione, delle competenze e delle loro relazioni nel corso dell'esperienza. Seguendo Piaget, lo diciamo con una frase contundente: *conoscenza è adattamento* (Piaget, 1967, 1970; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1948).

Ma *chi* si adatta, e a *che cosa*? Ciò che si adatta sono non solo gli esseri umani *tout court*, ma gli schemi, cioè le forme esplicite di organizzazione dell'attività: gli schemi si adattano alle situazioni per raggiungere la conoscenza (o comunque il traguardo auspicato). O, meglio: gli esseri umani adattano i loro schemi allo scopo di appropriarsi di una conoscenza. Meglio ancora: l'essere umano si appropria di una conoscenza se sa adattare i propri schemi a una nuova situazione, il che gli permette di apprendere. Il saltatore in alto novizio decide di cambiare allenatore, scegliendo una persona competente che gli insegnerà come modificare, allo scopo di migliorarli, i suoi schemi di base: rincorsa, stacco, rotazione, superamento. La modifica degli schemi può essere deliberata, ossia frutto di una scelta consapevole, o no. Gérard Vergnaud fece circa 5 lustri fa quasi in questo senso l'esempio del salto con l'asta, durante uno stage presso l'università di Torino.

Risulta fondamentale dunque evidenziare la coppia: situazione-schema, cosa che né Piaget, né Vygotskij hanno fatto, mentre ciò appare nell'opera di Vergnaud (distribuita in diverse opere tra la fine degli anni '80 e la fine dei '90). Tale relazione è fondamentalmente dialettica: non c'è schema senza situazione, ma neppure situazione senza schema. Perché è lo schema che permette di identificare una situazione come facente parte di una certa classe di situazioni, in quanto uno schema si dirige effettivamente sempre a una classe di situazioni, per la sua stessa natura generale e non univoca. Perciò lo schema è sì un fatto universale, ma in continua evoluzione possibile.

L'apprendimento necessita di una situazione di partenza, la quale si organizza in schemi apprenditivi e modalità (per esempio, la *teoria delle situazioni* di Guy Brousseau) (Brousseau, 1997); a volte gli schemi sono cercati, a volte sono insiti nell'esecuzione e nel processo; a volte sono il frutto di ingegnerie (Brousseau, 2008; D'Amore, 2008).

Nota 2.

Non possiamo qui non ricordare la famosissima e citatissima definizione di *concetto* data da Vergnaud (1990), basata proprio sull'idea di schema, in ambito assai più generale di quello cognitivo; il concetto *C* sarebbe la terna ordinata (S, I, *S*) nella quale:

> S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);
> I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il *significato*);
> *S* è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*). (D'Amore, 1999, p. 208)

Si veda anche la voce "Gérard Vergnaud" sulla *Enciclopedia Pedagogica* a cura di Mauro Laeng (D'Amore, 2002).

Questa posizione, in passato presa in esame fortemente da tutti gli studiosi di DdM, è ora caduta un po' in disuso, per fare spazio a nuove concezioni; a nostro avviso, questa posizione di Vergnaud è un'idea anticipatrice sia della nozione di *attività riflessiva* nella teoria della oggettivazione di Luis Radford (Radford, 2006b; Santi, 2011), sia della nozione di *pratiche operazionali e discorsive* nella teoria EOS di Juan Diaz Godino (Godino & Batanero, 1994; D'Amore, Font, & Godino, 2007; D'Amore & Godino, 2007).

Va ricordato che l'idea di *concetto* in Duval non è ternaria ma binaria: concetto = (segno, oggetto) (si vedano Duval, 1993, 1995, 1998; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017).

In un'ottica di ricerca in DdM in chiave storica, questi temi andrebbero accuratamente ripresi in esame.

2.8. Schemi e campi concettuali

In forma riassunta:

- Uno schema è una totalità dinamica funzionale.
- Uno schema è un'organizzazione invariante dell'attività per una classe definita di situazioni.
- Uno schema comporta quattro categorie di componenti:
  - uno scopo (o più d'uno), dei sottoscopi e delle anticipazioni;
  - delle regole d'azione, di presa d'informazione e di controllo;
  - degli invarianti operatori (concetti-in-atto e teoremi-in-atto);
  - delle possibilità di inferenza.
- Uno schema è una funzione che tiene conto del passare del tempo dato che assume valori di entrata e fornisce quelli di uscita in uno spazio temporalizzato; per capire bene questo punto occorre pensare a uno schema evolutivo.

Per sua natura, dunque, lo schema è l'espressione circoscritta e finita di una generalizzazione (semmai in atto).

L'idea generale dalla quale si sta prendendo tutto ciò è sostanzialmente riconducibile a Immanuel Kant; ma Kant non arriva a mettere in relazione schemi e concetti nella loro reciprocità; questo viene fatto solo nella teoria dei campi concettuali (Vergnaud, 1990), nata proprio dal bisogno di teorizzare il lento processo di costruzione-appropriazione degli schemi e dei concetti. In tale teoria, sono essenziali due elementi posti in evidenza ancora da Vergnaud (già citati in precedenza):

- *concetto-in-atto*: concetto ritenuto come pertinente, come valido, in una certa situazione, descritto da un certo schema o da un'interazione fra schemi;
- *teorema-in-atto*: proposizione del tipo "se A allora B" ritenuta vera in una certa situazione, ma generalizzabile a un dominio di situazioni fino a una situazione non contestuale.

Un *concetto* è allo stesso tempo un insieme di situazioni (quelle che danno senso al concetto), un insieme di invarianti operatori (cioè di concetti-in-atto e di teoremi-in-atto che organizzano gli schemi, i trattamenti di queste informazioni) e un insieme di rappresentazioni simboliche e linguistiche che permettono di esprimere gli oggetti e le relazioni presenti nelle situazioni concernenti, eventualmente, i rapporti che essi hanno con le caratteristiche degli schemi. Su questa strada incontriamo due accezioni (almeno) di *concetto*:

- concezione, quando si parla di un soggetto;
- concetto vero e proprio, quello elaborato dalla cultura.

Non si può capire lo sviluppo di un concetto senza inserirlo in un sistema e si è poi obbligati a studiare questo sistema, il campo concettuale, per potersi appropriare del concetto. Un *campo concettuale* è dunque allo stesso tempo un insieme di situazioni (meglio: di classi di situazioni) e un insieme di concetti, insieme nel quale non tutte le proprietà si sviluppano nello stesso tempo nel corso dell'esperienza e dell'apprendimento.

Ma c'è sempre uno scarto fra la forma operatoria della conoscenza, quella che si usa nell'azione, e la forma predicativa della conoscenza, fatta di parole e di enunciati.

Il lavoro del didatta non è quello di lavorare sulla conoscenza del soggetto apprendente, ma sulle condizioni create dalla situazione messa in campo nella situazione di apprendimento, ovviamente tenendo in massimo conto gli schemi e l'adattamento.

Lo schema, ci insegna Vergnaud, è una totalità dinamica funzionale, la cui funzionalità è relativa appunto a questa totalità nella sua interezza, non dunque a quella relativa all'uno o l'altro dei suoi componenti.

E tuttavia, l'analisi delle componenti dello schema è altrettanto essenziale dell'analisi dello schema nella sua interezza, quando si vuol analizzare l'efficacia di uno schema. È il solito dibattito tra olistico e costitutivo. Il saltatore in alto può essere padrone assoluto di ciascuna delle componenti schematiche della sua azione sportiva, ma perdere di vista la successione nella sua totalità.

Che cosa caratterizza uno schema, quali sono le sue componenti?

Per prima cosa, lo scopo per il quale lo schema è costruito, spesso con dei sottoscopi: stabilire o riconoscere qual è l'intenzione che spinge a costruirlo o idearlo o metterlo in atto, espresso in termini di motivazione, interesse, scopo, bisogno.

Ci sono poi le componenti generative, cioè le regole da seguire, le informazioni da tenere in conto, tutto quel che riguarda il controllo. In tutto ciò ha un'importanza enorme la componente temporale.

Oltre a queste componenti [regole d'azione, messe in evidenza nel lavoro classico pionieristico di Allen Newell e Herbert Simon, creatori nel 1956 del *Logic Theory Machine* e nel 1957 del *General Problem Solver* (GPS)] (Russell & Norvig, 2003), ci sono tutte le componenti non osservabili con inferenze interne e il ruolo della memoria, più o meno esplicite e volontarie (e così, torniamo a sfiorare la psicologia).

Finalmente torniamo ancora una volta alle componenti degli invarianti operatori di Vergnaud, i concetti-in-atto e i teoremi-in-atto; essi costituiscono le componenti epistemiche di uno schema, essendo a loro affidato il compito di individuare gli oggetti in gioco nonché le proprietà singole, le relazioni e le trasformazioni, non solo quelle osservabili, come quelle semiotiche, ma anche quelle implicite. Gli invarianti operatori mettono in gioco le informazioni e le inferenze, con una funzione di concettualizzazione e di deduzione, come categorie concettuali.

Come ultima componente dello schema, si impone l'inferenza stessa, indispensabile alla teoria, grazie alle regolazioni locali, agli aggiustamenti, ai controlli, visto che mai avviene un'azione totalmente automatica, almeno nell'apprendimento. L'azione di adattabilità degli schemi è essenziale. Le regole d'azione, di assunzione di informazione e di controllo sono la traduzione pragmatica dei teoremi-in-atto di Vergnaud; esse interpretano il fatto che le varianti di una situazione possono in generale assumere più valori e i soggetti sono in grado di adattarsi a questi valori.

Lo schema struttura un'attività, nelle sue due componenti essenziali:

- la sistematicità, che si estrinseca nelle regole univoche cui sono soggette le attività (per esempio gli algoritmi aritmetici o algebrici);
- la contingenza, perché le regole cui obbedisce lo schema devono tener conto delle diverse situazioni di azione o di interpretazione cui lo schema si trova di fronte (diciamo così: una sorta di regola di opportunità).

L'idea di schema apporta una risposta teorica di grande interesse alla psicologia cognitiva pur restandone in grande misura esterna; per esempio la questione dell'adattamento a situazioni nuove, per esempio la risoluzione dei problemi, è ben teorizzata nell'idea di schema, proprio grazie alle quattro componenti che abbiamo visto. Ma questo non comporta, come molti vorrebbero, come è stato auspicato ingenuamente fino a pochi anni fa, come stupidamente ancora qualcuno sostiene o auspica, la degenerazione da situazioni di risoluzione di problemi a situazioni di algoritmizzazione di ipotetici passaggi componenti (Brousseau & D'Amore, 2008).

Nota 3.
Avendo citato Kant, immagini, modelli e schemi non possono non richiamare alla mente le forme *a priori* kantiane, come la base costitutiva di tutti e tre questi temi, dato che essi potrebbero essere pensati come le forme *a priori* cui la mente si assoggetta o alle quali ricorre per organizzare i dati sensoriali i quali acquisiscono un senso solo sulla base della cultura. Non si può non vedere qui la base di quelli che Radford chiama "concetti di ragione" (Radford, 2004; Santi, 2011).

2.9. La rappresentazione

Il concetto di *rappresentazione* coinvolge alcuni punti chiave: la percezione, i sistemi significante-significato, la concettualizzazione (in atto), lo schema.

Percepire significa porsi in relazione con gli oggetti reali, le loro proprietà e relazioni osservabili, identificabili e separabili cioè distinguibili. La distanza che c'è tra percepire e rappresentare sta nel fatto che la rappresentazione si occupa anche di oggetti, proprietà e relazioni non direttamente osservabili. Ne è anzi una componente essenziale. La percezione non è fatto scevro da bisogni cognitivi dato che questi necessitano di esperienza e di cultura.

La lingua materna e le altre forme simboliche sviluppate dalle società per comunicare e rappresentare costituiscono dei sistemi di significanti e significati; essi contribuiscono in modo notevole al funzionamento della rappresentazione. Poter fare uso di parole per identificare oggetti e loro relazioni, dà ai concetti uno statuto cognitivo decisivo. La rappresentazione dunque non è solo l'esplicitazione di qualche cosa all'interno di un lessico o, più in generale, di un sistema semiotico. Vi sono invarianti espliciti e impliciti che devono tenere in debito conto la comunicabilità, ma anche la possibilità di esplicitazione che porta a una stabilità necessaria per la rappresentazione stessa. Gli invarianti operatori sono le componenti principali della concettualizzazione: nell'attività essi si formano ed è nel corso dell'attività che producono i loro effetti, essenziali per la percezione specie per quanto riguarda l'informazione specifica per l'azione. Hanno un ruolo altrettanto importante delle inferenze che sono sempre state privilegiate come oggetto di studio da Aristotele a Kant, fino al primo Wittgentein.

Gli schemi costituiscono una componente assolutamente essenziale della rappresentazione, dato che essa è un'attività e dunque uno schema può nel suo corso costitutivo prendere forma e agire come è nella sua possibilità più significativa. Anzi, lo schema gioca proprio nell'ambito della rappresentazione la sua componente più significativa.

La rappresentazione può dunque essere pensata come la riorganizzazione di schemi.

Qualsiasi teoria della rappresentazione mette in gioco, per la sua stessa esistenza, un flusso di coscienza, una presa di coscienza ma anche processi incoscienti. Senza il flusso di coscienza (percezione e immaginazione), l'essere umano non sarebbe in grado di rappresentare né saprebbe riflettere su quel che è una rappresentazione.

Non bisogna dimenticare la dualità sempre presente cosciente-incosciente che riguarda gli invarianti operatori e che permette la coscientizzazione come momento chiave della concettualizzazione, cioè l'identificazione degli oggetti e dei processi della realtà, osservabili e non. Ciò spiega perché si tende oggi a mescolare e non più a gerarchizzare il cognitivo e il metacognitivo.

Su questo tema, in termini attuali, si può vedere Font, Godino e D'Amore (2007, 2010).

3. Termini esplicitamente connessi al sostantivo "didattica"

3.1. Didattica

Si può intendere per *didattica disciplinare* lo studio dei processi di trasmissione e di appropriazione dei saperi e dei saper-fare relativamente a ciò che questi processi hanno di specifico rispetto a un contenuto, tenendo conto di alcuni fattori che precisiamo di seguito (D'Amore & Frabboni, 1996, 2005; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007b).

a) Vogliamo includere in questa descrizione del termine, tanto la *didattica delle discipline* (come la DdM) quanto la *didattica professionale* (per esempio quella che si sviluppa nei corsi di formazione professionale di un dato apprendimento di fronte a situazioni molto specifiche: formazione all'interno di una ditta, insegnamento-apprendimento di un mestiere, spiegazioni sul funzionamento di un apparato, apprendistato sportivo: come effettuare efficacemente un salto in alto etc.).

b) Vogliamo evidenziare una volta tanto un elemento troppo sottaciuto e cioè quanto sia di rilevante importanza la *durata* del processo di trasmissione; un processo come quello scolastico, il cui risultato positivo o negativo si misura in anni, ha una sua specificità ben diversa da quella di una semplice comunicazione su un atto da compiere, per esempio dato da un professionista a un apprendista in un caso specifico. Il fattore "durata del processo di insegnamento-apprendimento" non viene quasi mai messo in evidenza negli studi.

c) È di rilevante importanza la *situazione* nella quale si svolge il processo; ne siamo così convinti da affermare che la situazione determina il processo (in bene o in male).

Prima di proseguire, vogliamo far notare come la specificazione del contenuto differenzia nettamente e senza alcuna possibile confusione l'azione didattica dalla psicologia. La psicologia dell'apprendimento si è sviluppata secondo modelli assai diversi: il comportamentismo, il cognitivismo, il modello dell'apprendimento per intuizione o *insight*, per imitazione personale o imitazione sociale e il connessionismo (Rumelhart & McClelland, 1986).

Per esempio, la psicologia dell'apprendimento studia i meccanismi dell'attenzione, cosa che le didattiche disciplinari non fanno (meglio: non hanno gli strumenti per fare; meglio ancora: lo studio di quegli strumenti non rientra fra i loro scopi).

Torniamo al discorso precedente.

Che differenza c'è tra didattica di una disciplina da un punto di vista scolastico e didattica professionale? A nostro avviso, sono i processi di concettualizzazione che fanno la differenza: la didattica di una disciplina fa necessariamente riferimento all'epistemologia di quella disciplina, nel senso che è impensabile una didattica della disciplina *d* che non chiami in causa non solo *d*, ma anche l'epistemologia di *d*.

Questo genere di riflessioni sulla specificità, sembra non avere fine; nel caso specifico della matematica, possiamo segnalare almeno 5 aspetti specifici del suo apprendimento (Fandiño Pinilla, 2008):

- apprendimento concettuale
- apprendimento algoritmico
- apprendimento strategico (es.: la risoluzione dei problemi)
- apprendimento comunicativo
- apprendimento semiotico (es.: gestione delle rappresentazioni e trasformazioni di trattamento e conversione).

Qualsiasi professionista del processo di insegnamento-apprendimento a lungo periodo, per esempio scolastico o universitario, può confermare che questa ripartizione specifica ha non solo una valenza teorica, ma anche e soprattutto un senso empirico, di grande interesse: i problemi che gli allievi incontrano in un campo concettuale sono diversi da quelli che incontrano in un altro, differenti sono anche i problemi di concettualizzazione; e così via.

Tutto questo discorso non sembra avere l'analogo nell'apprendimento professionale usuale. Per cui è fortemente scorretto cercare di far passare l'idea che ha cercato di imporsi pochi anni fa, che lo studente a scuola è come un apprendista in fabbrica; i processi sono indubbiamente assai diversi. Inoltre: un docente non è semplicemente un tecnico in grado di risolvere problemi circoscritti, spesso simili; un docente è un professionista che deve mettere in campo conoscenze vaste e complesse e saper prendere decisioni ad ampio raggio, spesso di natura complessa.

Anche l'idea di *valutazione di una competenza* deve essere rivista criticamente; all'ex apprendista si può proporre una prova pratica di valutazione della competenza raggiunta al termine dell'addestramento; al neofita del salto in alto si può semplicemente proporre di superare l'asticella posta a 2 m di altezza: o la supera o no; ma valutare le competenze di uno studente in aula è assai più complesso, a nostro avviso impossibile con test (come dimostra il fallimento in questo senso di valutazioni ispirate a questo modo di vedere, in vari Paesi del mondo). Questo spiega il fatto che il vasto e prolungato dibattito internazionale sulla valutazione delle competenze a scuola si sia sempre arenato e faccia tanta fatica a essere definito in termini chiari e univoci e il perché gli insegnanti facciano giustamente così fatica a fare proprio questo discorso, trasformandolo in attività oggettivamente valutabili (Fandiño Pinilla, 2011).

3.2. Competenza

Da sempre in modo ovvio, più di recente in maniera caparbia e forse un tantino esagerata, nel processo di insegnamento-apprendimento si chiama in causa la competenza; ci riferiamo qui all'accezione data in D'Amore, Godino, Arrigo e Fandiño Pinilla (2003). Stante la difficoltà di interpretare concretamente come trasformare richieste istituzionali in attività didattiche concrete ma concettualmente fondate, abbiamo in passato lavorato e riflettuto molto sul tema (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003, 2006b, 2007a; Fandiño Pinilla, 2005, 2006, 2011, 2015).

Se la competenza è ritenuta essere un fattore valutabile, allora deve essere misurabile e dunque ha senso parlare del valore di una competenza e dunque fissare un ordine di maggior o minor competenza individuale; in maniera molto banale si può cominciare con un po' di buon senso intuitivo (ci ispiriamo a colloqui informali fatti con Gérard Vergnaud):

- A è più competente di B nel campo C se sa fare qualche cosa in C che B non sa fare;
- A è più competente nel campo C nel tempo t' che non nel tempo t (t<t') se A sa fare qualche cosa in C nel tempo t' che non sapeva fare nel tempo t;
- A è più competente di altri se si comporta in una maniera migliore o più efficace: più rapido, meglio compatibile con il modo di fare di terzi;
- A è più competente di altri se dispone di un repertorio di processi alternativi che gli permettono di adattare il suo comportamento ai diversi casi che gli si possono presentare;
- A è più competente di B se egli è più efficace di fronte ad una nuova situazione, rispetto a quanto non lo sia B;
- …

In questo repertorio (assai superficiale e non certo esauriente) di casi, si nasconde la base dell'idea di *misura di una competenza*.

Ma il concetto di *competenza* non è, di per sé, scientifico; per una sua sistematica presentazione si ha bisogno di analizzare un'attività, il che significa chiamare in causa gesti, ragionamenti, operazioni scientifiche e tecniche, motivazione, volizione, impegno, desiderio, affettività, … tutti elementi che non (sempre) si prestano con efficacia (e semplicità) a misurazioni oggettive.

Serve un concetto forte per designare le forme di organizzazione dell’attività in situazione, e in questo ci aiuta il concetto di *schema* elaborato all’interno della teoria dei campi concettuali.

3.3. Situazione

Uno schema si dirige sempre verso una situazione caratterizzata da uno scopo atteso, o più d’uno, per esempio un problema da risolvere, nella sua complessità epistemica e cognitiva, nonché di messa in campo di competenza.

I due concetti di *schema* e di *situazione* sono ciascuno strettamente relazionato all’altro. Dunque, anche in una situazione specifica e non solo in generale, le idee di *scopo*, *regola*, *concettualizzazione*, *inferenza* sono essenziali e strettamente connesse. Esse intervengono nella determinazione di un’ingegneria di situazioni didattiche in generale, ancora di più nel caso enormemente diffuso in cui, a fronte di un docente, si trovano più discenti; in questo caso, il processo di interazione tra soggetti può occupare un ruolo decisivo, addirittura più decisivo dei processi di comprensione (D’Amore, 2005). Qui assume un ruolo fondamentale l’idea di *labor* (D’Amore, 2015), lavoro svolto in comune fra docente e allievo, presa in profonda considerazione in questi ultimi anni dalla teoria dell’oggettivazione (Radford, 1997, 2004, 2005, 2006a, 2014, 2015, 2017a; D’Amore, 2018; D’Amore & Radford, 2017; Radford & D’Amore, 2006). Suggeriamo al lettore l’articolo di Luis Radford (2017b) nel quale l’autore racconta in prima persona il percorso personale che l’ha portato all’elaborazione della sua teoria.

Spesso in una situazione si evidenziano due termini relativi ai soggetti in gioco, e con diverse modalità: *esperienza* e *apprendimento*. Sulla base di alcuni presupposti, l’apprendimento fa parte dell’esperienza, ma non viceversa, per cui fra i due c’è una sorta di dipendenza causale. Si possono però trovare esempi nei quali l’esperienza comporta apprendimento, grazie a situazioni nelle quali l’esperienza si sviluppa. Ovviamente, in questo caso dobbiamo generalizzare e non pensare solo all’ambiente scolastico. Dunque l’apprendimento condivide con l’esperienza alcuni punti cruciali:

- la durata temporale, che può essere assai variabile;
- i diversi registri e le diverse modalità messe in campo nelle situazioni: registri tecnici, linguistici, gestuali, sociali, affettivi;
- i ruoli personali in gioco e dunque il senso che i vari soggetti assumono;
- i ruoli degli strumenti in gioco.

Tutti concordiamo sul fatto che l’esperienza ha un’enorme varietà di modalità di espressione, mentre non così sembra essere per l’apprendimento; ma la teoria dei campi concettuali ribalta queste idee, dato che mostra come uno stesso concetto si sviluppa attraverso situazioni varie e diverse, dato che lo stesso concetto è posto in relazione in più modi e su diversi livelli con concetti ed enunciati ritenuti veri (teoremi-in-atto) per un atto di intuizione, più rappresentazioni linguistiche e simboliche; inoltre si sviluppa unitamente ad altri concetti creando veri e propri sistemi concettuali.

Sul piano teorico, *situazione* e *schema* formano una coppia indissociabile; le situazioni offrono delle occasioni per dare un senso alle attività e ai concetti, ma non sono esse stesse il senso. Il senso è lo schema, asserisce acutamente Piaget in varie occasioni. Ma la realtà è fatta di oggetti e di relazioni: si tratta sempre di dare un senso a tali oggetti e a tali relazioni, attraverso il filtro delle situazioni, la loro interpretazione, la loro realtà.

Spesso, nelle situazioni didattiche, quello cui s'assiste è, al contrario, proprio una perdita di senso dato agli oggetti e alle loro relazioni (Brousseau & D'Amore, 2008).

Su quella geniale teoria che ha dato origine alla DdM e che si chiama *teoria delle situazioni*, le citazioni possibili sono migliaia; ci limitiamo a Brousseau (1997) come selezione di testi base, e a D'Amore (1999) e D'Amore e Sbaragli (2011) come testi didattici, destinati a futuri insegnanti.

4. Teoria dei concetti figurali

Nel lontano 1963, l'indimenticabile pioniere della DdM Efraim Fischbein lanciò la fertile idea dei *concetti figurali* (Fischbein, 1963). Vuoi che la lingua nella quale era scritto il libro (il rumeno) non fosse proprio la più diffusa negli ambienti scientifici, vuoi che ancora fosse troppo presto per questo genere di considerazioni, fatto sta che si dovette aspettare il 1993, anno della traduzione e della pubblicazione in inglese di questa idea, per avere una sua definitiva esplosione in contesto internazionale (Fischbein, 1993). Naturalmente, ciò non significa che vi siano stati 30 anni di assoluto silenzio su questo tema! Anzi. Lo stesso Fischbein e tanti altri ricercatori hanno scritto e lavorato in tal senso; solo che l'articolo definitivo, che ne raccoglie tutte le idee e le esperienze, segue di 30 anni la prima apparizione di un altro scritto con lo stesso titolo. Di che cosa si tratta? Lo diciamo con le parole dello stesso Fischbein:

> Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate da definizioni nel contesto di un certo sistema assiomatico. Da questo punto di vista una figura geometrica ha una natura concettuale. Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale). (...) Una figura geometrica può allora essere descritta come avente *intrinsecamente* proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica *non* è un puro concetto. È un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. (...) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (...) Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate *concetti figurali*, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo

> stesso tempo, possiedono qualità concettuali – come idealità, astrattezza, generalità, perfezione. Non intendo affermare che la rappresentazione che abbiamo in mente, quando immaginiamo una figura geometrica, sia priva di ogni qualità sensoriale (come il colore) eccetto le proprietà spaziali; ma affermo che, mentre operiamo con una figura geometrica, noi agiamo come se *nessun'altra qualità contasse*. (Fischbein, 1993, p. 142)

Dunque, nel caso particolare delle figure della geometria, noi siamo disposti a selezionare proprietà, qualità, aspetti diversi, perché tendiamo a un concetto geometrico; e quello figurale sembra allora essere un concetto a sé stante.

Il disegno di una figura geometrica (per esempio di un trapezio) è una rappresentazione grafica di un concetto complesso: non si tratta solo del concetto geometrico astratto di trapezio, ma del concetto figurale di trapezio. Non appena abbiamo a disposizione il disegno di un trapezio, quella figura di trapezio diventa una particolare produzione iconica del concetto figurale di trapezio.

Il disegno a nostra disposizione non condivide se non in parte le proprietà caratteristiche del concetto di *trapezio* (generalità, astrattezza), ma ne condivide in pieno la componente figurale.[3] Ma, mentre la parola *trapezio* non ha … forma trapezoidale, la rappresentazione (il disegno) di un trapezio allude proprio iconicamente a quella forma; dunque le rappresentazioni figurali di particolari concetti geometrici condividono con il concetto geometrico astratto al quale fanno riferimento, del quale vogliono essere immagine, qualche cosa: *la componente figurale*.

Esiste dunque qualche cosa che si può chiamare *concetto figurale* che non coincide con l'oggetto geometrico in sé.

Ma allora scatta un meccanismo che interessa lo studioso di DdM: se si prediligono alcune rappresentazioni, dato che queste si trovano a fare da cuscinetto, da legame, tra la componente diciamo così figurale e il concetto della figura in sé, tali rappresentazioni diventano forti, finiscono con l'essere riconosciute come supporti diretti se non unici per la componente figurale del concetto. Anzi: quelle figure, quelle rappresentazioni, sono *la* componente figurale del concetto.

Ora, bisognerebbe sfruttare questo fatto non per bloccare l'apprendimento (come potrebbe capitare in aula) ma per rafforzarlo. Occorre cioè che vi sia consapevolezza critica e che si sia disposti (allenati) ad atti mentali opportuni per poter far sì che questi supporti visivi siano produttivi.

Scrive Mariotti (1995), allieva diretta di Fischbein: "Solo (...) con un atto mentale, un disegno può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità" (p. 48). Occorre dunque una dinamica dei concetti figurali, occorre far interagire gli aspetti figurali con quelli

[3] Qui ci sarebbe da notare, ancora una volta, che *quella figura di trapezio* non è *un trapezio* (considerato nella sua generale specificità), per ovvi motivi; le proprietà peculiari specifiche della figura prodotta semplicemente circostanziano l'idea generale di trapezio.

concettuali.

È allora illuminante la ricerca condotta dalla stessa Mariotti (1992) sulla seguente attività: gli allievi devono contare il numero di facce, vertici e spigoli di un cubo, secondo due diverse modalità: dapprima senza alcun ausilio di modelli concreti, poi utilizzando uno di questi. I protocolli prodotti da questa ricerca sono molto chiarificatori e i commenti che fa l'autrice lo sono ancora di più: "Alcuni studenti contano mentalmente, simulando la numerazione poi, dopo qualche momento, perdono il filo di quest'ultima e si arenano (...). Uno studente, invece, conta raggruppando gli elementi secondo un'organizzazione spaziale dell'immagine mentale e ci riesce" (Mariotti, 1992, p. 13).

Dunque, per superare la prova, sembra necessario organizzare l'immagine mentale secondo schemi concettuali che rimandano a diverse abilità.

Ma l'idea di *immagine mentale* sembra per i più essere qualche cosa di sfuggente, di debole, di sfuocato; per poter lavorare con successo al problema proposto dalla Mariotti occorre invece dare a tale immagine mentale una caratteristica di *stabilità*. Di che cosa si tratta? Lo diciamo con la definizione dell'autrice: "una capacità di mantenere in testa l'oggetto del ragionamento geometrico come un invariante, malgrado le trasformazioni realizzate dal soggetto" (Mariotti, 1992, p. 13).

Si può anche parlare di armonia tra l'aspetto figurale e quello concettuale: se c'è dissidio, se tale armonia manca, allora le attività geometriche basate essenzialmente su figure non portano alcuna crescita nell'apprendimento consapevole.

Ma non ci sono solo le figure a fungere da supporti visivi per gli allievi; nella pratica scolastica sono molto diffusi anche modelli concreti di varia natura (di legno, di cartone, di plastica); in tal senso, le figure e i disegni sono solo un sottoinsieme dei modelli concreti disponibili agli allievi. Scrive Maier (1993):

> In geometria sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perché le loro concezioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni. A mio avviso, questo è dovuto al fatto che i supporti visivi sono spesso utilizzati nelle ore di geometria in una maniera non soddisfacente. A volte i modelli utilizzati sono inadatti a rappresentare la nozione che si tratta e così gli allievi acquisiscono un'idea sbagliata per quanto riguarda il senso del vocabolario geometrico. (Maier, 1993, p. 75)

Si veda anche Maier (1998).

Tornando alle implicazioni didattiche, scrive ancora Fischbein nello stesso articolo:

> Uno studente di scuola superiore dovrebbe essere reso consapevole del conflitto e della sua origine, per dare rilievo nella sua mente alla necessità di basarsi nei ragionamenti matematici soprattutto sui limiti formali. Tutto ciò porta alla

> conclusione che il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non deve essere considerato un effetto spontaneo degli usuali corsi di geometria. L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale. Ciò dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. (Fischbein, 1993, p. 156)

La preoccupazione è legittima, visto che i risultati ottenuti senza di essa sono sotto gli occhi di tutti; e la raccomandazione di Fischbein è estremamente chiara.

Nota 4.
Certo, un'eventuale nuova presa in carica di questa teoria, oggi, dovrebbe prima passare attraverso l'analisi della distinzione fra realismo e pragmatismo, dato che essa sembra molto connessa al primo; nell'ipotesi pragmatista, la distinzione diventa assai sfumata a causa del fatto che in essa *oggetto*, *concetto* e *pratica* sono fortemente intrecciati, difficilmente separabili ed è assai difficile evidenziare uno di questi termini isolandolo dagli altri. Si pone poi il problema degli oggetti che non hanno a che fare con la geometria e ci si potrebbe chiedere se sono possibili e convenienti analisi simili, mutando ovviamente quel che c'è da mutare. Anche queste considerazioni, a nostro avviso, mostrano la modernità e l'attualità di queste riflessioni che ancora ci costringono a porre dei distinguo di indubbio interesse.

5. Un incontro pubblico fra Fischbein e Vergnaud

Dal 1986, ininterrottamente, si svolge il convegno nazionale *Incontri con la Matematica* riservato a insegnanti di scuola; il primo (numero 0) si svolse a Bologna sul tema *Gioco e Matematica* (D'Amore, 1986). Dal 1987 l'evento si svolge a Castel San Pietro Terme; nel novembre 2018 si è svolta la XXXII edizione (D'Amore & Sbaragli, 2018).

In occasione della edizione numero 6 (13–15 novembre 1992), si decise di dedicare tutto il convegno all'incontro-confronto fra i due grandi studiosi allora sulla bocca di tutti i ricercatori, ma per lo più sconosciuti agli insegnanti: Efraim Fischbein e Gérard Vergnaud che, a detta di entrambi, mai si erano incontrati personalmente. Ci sembrava una ghiotta occasione per far conoscere al pubblico degli insegnanti italiani le differenze e le sintonie fra quei due giganti della ricerca in DdM. Non c'erano altri relatori, solo i due.

L'evento fu un'occasione ghiotta per rendersi conto delle profonde relazioni fra gli studi dei due ricercatori, delle differenze di impostazioni e degli interessi personali specifici. In più occasioni, ma specialmente l'ultimo giorno, si diede ampio spazio a discussioni personali fra i due, svolte di fronte al vasto pubblico.

Non vogliamo qui entrare in dettagli, ma solo puntare l'attenzione sulle analogie a proposito di termini come *schemi*, *modelli*, *difficoltà cognitive*, temi che, a nostro avviso, potrebbero essere ripresi dalla ricerca in DdM proprio a partire da quanto emerse in questa occasione storica.

Per avere una relazione completa su questo evento internazionale di portata a nostro avviso immensa, si veda (Fischbein & Vergnaud, 1992). L'analisi di questo testo mostra come vi siano intrecci notevoli di interessi comuni (modelli, difficoltà di apprendimento da parte degli studenti, ragionamento matematico, schemi, concetti) e altri specifici (dimostrazione, probabilità, … in Fischbein; aritmetica, *problem solving*, … in Vergnaud).

Noi riteniamo che questo testo, sebbene abbia oggi 26 anni di età, ancora potrebbe essere fonte di riflessione teorica per ricercatori in DdM.

Ringraziamento

Gli autori esprimono un sentito ringraziamento alla PhD Maura Iori per il serio contributo critico generosamente fornito alla realizzazione di questo lavoro.

Riferimenti bibliografici

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Montreal: Holt, Rinehart et Winston. [Trad. it.: Milano, Angeli, 1978].

Bara, B. G. (1990). *Scienza cognitiva: Un approccio evolutivo alla simulazione della mente*. Torino: Boringhieri.

Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind: Collected essays in anthropology, psychiatry, evolution, and epistemology*. Chicago: Chandler Publishing Company. [Trad. it.: Milano, Adelphi, 1976].

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica: Dall'empirico al didattico. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la matematica n. 22: Didattica della matematica e azioni d'aula* (pp. 3–14). Bologna: Pitagora.

Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, *3*, 261–286.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press. [Trad. it.: Roma, Armando, 1964].

Bruner, J. S. (1964a). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, *19*(1), 1–15. doi:10.1037/h0044160

Bruner, J. S. (1964b). *Some theorems on instruction illustrated with reference to mathematics*. In E. R. Hilgard (Ed.), *Theories of learning and instruction: The sixty-third yearbook of the National Society for the Study of Education* (pp. 306–335). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University Press. [Trad. it.: Roma, Armando, 1982].

Chafe, W. L. (1977). Creativity in verbalization and its implications for the nature of stored knowledge. In R. O. Freedle (Ed.), *Discourse production and comprehension* (Vol. I, pp. 41–55). Norwood, NJ: Ablex.

D’Amore, B. (1993). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Milano: Angeli. [Trad. spagn.: Madrid, Sintesis, 1993].

D’Amore, B. (1997). Matite - Orettole - Przxetqzyw: Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *20A*(3), 241–256.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Trad. spagn.: Bogotá, Magistero, 2006; trad. portog.: Sao Paolo: Livraria da Física, 2015].

D’Amore, B. (2000). Rappresentazioni. Immagini e modelli. Una proposta di terminologia. Modelli mentali negli studenti. *Iter*, *7*, 80–85.

D’Amore, B. (2001a). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *38*(1), 17–46.

D’Amore, B. (2001b). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: Interactions constructivistes dans l’apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 38*(2), 143–168.

D’Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. In M. Laeng (Ed.), *Enciclopedia Pedagogica. Appendice A-Z* (pp. 1508–1509). Brescia: La Scuola.

D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325–336.

D’Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri. [Trad. tedesco: Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, 2010].

D’Amore, B. (2008). Prefazione a: Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica* (B. D’Amore, Ed.) (pp. VII–XII). Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*, *63*, 19–26.

D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.

D’Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509

D’Amore, B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 237–254). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, *1*(1), 4–20. Disponibile da www.rivistaddm.ch

D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 97–127.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 327–338.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006a). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29A–B*(6), 645–664.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006b). Una riflessione sul termine "competenza" in didattica della matematica. *Difficoltà in matematica*, *2*(2), 155–164.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). Dalla conoscenza alla competenza nell'educazione matematica. In A. M. Benini & A. Orlandoni (Eds.), *Matematica: Ricerca sul curricolo e innovazione didattica* (pp. 12–20). Napoli: Tecnodid.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). *Le didattiche disciplinari*. Trento: Erickson.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto".* (Prefazione e postfazione di Guy Brousseau). Bologna: Archetipolibri. [Ediz. spagn.: Bogotá, Ed. Magisterio, 2018].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli. S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 119–162.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49–77.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 10*(2), 191–218.

D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., & Sandri, P. (1994). Everyday language and "external" models in an a-didactic situation. In N. Malara & L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 115–122). Modena: Dipartimento di Matematica, Università di Modena.

D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223–246.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (Eds.). (2018). La didattica della matematica, strumento concreto in aula. *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 32.* Bologna: Pitagora.

Dupin, J.-J. (1995). Modèles et modélisation dans l’enseignement: Quelques contraintes didactiques. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIIIe école et université d’été de didactique des mathématiques* (pp. 247–257). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349–382.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R. (2015). Les theories cognitives en didactique des mathematiques: Lesquelles et pourquoi? In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 97–126). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría: Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. In R. Duval & A. Saenz Ludlow (2016), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. (Prefazione di Bruno D’Amore. Articoli commentati da Bruno D’Amore e Carlos Eduardo Vasco Uribe) (pp. 13–60). Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D’Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Duval, R. (2018). Per l’educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211–245.

Fandiño Pinilla, M. I. (Ed.). (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Competenza e valutazione: una sfida dell’educazione di oggi. In A. M. Benini & L. Gianferrari (Eds.), *Valutare per migliorarsi* (pp. 40–48). Napoli: Tecnodid.

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. In B. D’Amore (Ed.), *Matematica: L’emergenza della didattica nella formazione* (pp. 21–28). Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson. [Trad. spagn.: Bogotá, Ed. Magisterio, 2010].

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). *Curricolo, competenze e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2015). Insegnare e valutare la competenza in matematica. In B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla, S. Loiero, I. Mattozzi, M. Pellerey, T. Pera, G. Staccioli, & P. Traverso (Eds.), *Didattica per competenze*. Supplemento a *La Vita Scolastica*, *70*(2), 10–14.

Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale*. Bucarest: Editura Academiei Republicii Populare Romine.

Fischbein, E. (1985a). Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 8–19). Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 122–132). Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). Matematica a scuola: Teorie ed esperienze. In B. D'Amore (Ed.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 6*. Bologna: Pitagora.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 2–7.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2010). Representations in mathematics education: An onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, *2*(1), 58–86.

Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston. [Trad. it.: Roma, Armando, 1987].

Gagné, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. New York, NY: CBS College Publishing.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Hall, E. T. (1959). *The silent language*. New York, NY: Doubleday.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1970].

Holt, R. R. (1964). Imagery: The return of ostracized. *American Psychologist*, *19*(4), 254–264. doi:10.1037/h0046316

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3

Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5

Johnson-Laird, P. N. (1972). The three-term series problem. *Cognition*, *1*(1), 57–82.

doi:10.1016/0010-0277(72)90045-5
Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental Models*. Cambridge, MA: Harvard University Press. [Trad. it.: Bologna, il Mulino, 1988].
Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. J. (1991). *Deduction*. Hove, UK, and Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Kaldrimidou, M. (1987). *Images mentales et répresentations en mathématiques chez des mathématiciens et des étudiants en mathématiques* (Thèse de 3e cycle). Université Paris VII.
Katz, A. N. (1983). What does it mean to be a high imager? In J. C. Yuille (Ed.), *Imagery, memory and cognition* (pp. 39–63). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Katz, A. N. (1987). Individual differences in the control of imagery processing: Knowing how, knowing when and knowing self. In M. A. McDaniel & M. Pressley (Eds.), *Imagery and related mnemonic processes* (pp. 177–203). New York, NY: Springer.
Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(1), 69–80.
Maier, H. (1998). L’uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria. *La matematica e la sua didattica*, *12*(3), 271–290.
Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect. *Topologie structurale/Structural topology*, 18, 9–18.
Mariotti, M. A. (1995). Le rappresentazioni grafiche e l’apprendimento della geometria. In B. D’Amore (Ed.), *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n. 9: Insegnare ad apprendere la Matematica in aula: Situazioni e prospettive* (pp. 47–58). Bologna, Pitagora.
Minsky, M. (1975). *A framework for representing knowledge*. In P. Winston (Ed.), *The psychology of computer vision* (pp. 211–277). New York, NY: McGraw-Hill.
Noirfalise, R., & Perrin-Glorian, M.-J. (Eds.). (1996). *Actes de la VIIIe école et université d’été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.
Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.
Paivio, A. (1986). *Mental Representations: A dual coding approach*. Oxford: Oxford University Press.
Pellerey, M. (1984). Procedimenti matematici e immagini mentali. *Orientamenti pedagogici*, *31*(3), 444–465.
Piaget, J. (1967). *Lo sviluppo mentale del bambino e altri studi di psicologia*. Torino: Einaudi.
Piaget, J. (1970). *Psicopedagogia e mentalità infantile*. Firenze: Le Monnier.
Piaget, J., & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l’enfant*. Paris: Presses universitaires de France. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1970].
Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l’enfant*. Paris: Presses universitaires de France.
Pontecorvo, C. (1983). Concettualizzazione e insegnamento. In C. Pontecorvo (Ed.), *Concetti e conoscenze* (pp. 262–354). Torino: Loescher.
Pontecorvo, C., & Pontecorvo, M. (1985). *Psicologia dell’educazione: Conoscere a*

scuola. Bologna: il Mulino.
Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.
Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *18*(1), 4–23.
Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19(2),* 191–213.
Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129.
Radford, L. (2006b). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 39–65.
Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132–150.
Radford, L. (2015). The epistemological foundations of the theory of objectification. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 127–149). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509
Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 113–134). Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Radford, L. (2017b). La consapevolezza dell'importanza del contesto sociale, culturale e politico del pensiero, dell'insegnamento e dell'apprendimento: Alcuni elementi del mio percorso. *La matematica e la sua didattica*, *25*(1), 65–74.
Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). Semiotics, culture and mathematical thinking [Numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129.
Romberg, T. A. (1983). Toward "normal science" in some mathematics education research. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, *15*(2), 89–92.
Romberg, T. A. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermander (Eds.), *Proceedings of the 2nd TME-Conference: Foundations and methodology of the discipline mathematics education (Didactics of mathematics)* (pp. 97–112). Bielefeld-Antwerpen, Germania: University of Bielefeld – IDM Publications.
Rumelhart, D. E. (1980). Schemata: The building blocks of cognition. In R. J. Spiro et al. (Eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension* (pp. 33–58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Rumelhart D. E., & McClelland, J. L. (Eds.). (1986). *Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition*. Cambridge, MA: MIT Press. [Trad. it. (parziale): Rumelhart, D. E., & McClelland, J. L. (1991). *PDP: Microstruttura dei processi cognitivi: Sistemi intelligenti*. Bologna: il Mulino].
Rumelhart, D. E., & Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory.

In R. C. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague (Eds.), *Schooling and the acquisition of knowledge* (pp. 99–135). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Russell, S. J., & Norvig, P. (2003). *Artificial intelligence: A modern approach*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Saada-Robert, M. (1989). La microgénèse de la représentation d'un problème. *Psychologie Française*, *34*(2–3), 193–206.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2/3), 285–311.

Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding: An inquiry into human knowledge structures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shepard, R. N. (1980). *Internal representations: Studies in perception imagery and cognition*. Montgomery, VT: Bradford.

Tall, D. (1999). *Efraim Fischbein, 1920–1998, Founder President of PME: A tribute.* Disponibile da https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999b-fischbein-tribute.pdf

Vecchio, L. (1992). Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale. In L. Vecchio (Ed.), *Atti del Convegno di Pavia, 5–6 ottobre 1990: Le immagini mentali* (pp. 15–48). Firenze: La Nuova Italia.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française*, *30*(3–4), 245–253. [Trad. it. in Fischbein & Vergnaud, 1992, vedi sopra, 125–143].

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *10*(1), 133–169.

Vergnaud, G. (1995). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 20–45). Bologna: Zanichelli-UMI.

Vergnaud, G. (2017). Due riflessioni sull'attività in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *25*(1), 7–12.

Vygotskij, L. (1990). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato in russo nel 1934).

Whorf, B. L. (1940). Science and linguistics. *MIT Technology Review*, *42*(6), 229–231 e 247–248.

Whorf, B. L. (1956). *Language, thought, and reality: Selected writings of Benjamin Lee Whorf* (J. B. Carroll, Ed.). Cambridge, MA: MIT Press.

Winograd, T. (1975). Frame representations and the declarative/procedural controversy. In D. G. Bobrow & A. M. Collins (Eds.), *Representation and Understanding: Studies in Cognitive Science* (pp. 185–210). New York, NY: Academic Press.

CONVEGNI E CONGRESSI

INCONTRI CON
LA MATEMATICA

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD, Bologna

ForMATH Project

ISTITUTO COMPRENSIVO LUCCA 2
Piazza Aldo Moro, 185 - 55100 LUCCA
Tel. 0583/55497 - fax 0583/418586 - C.F. 92054350464
e-mail: luic849005@istruzione.it - pec-mail: luic849005@pec.istruzione.it

32 Convegno Nazionale

La didattica della matematica, strumento concreto in aula

Castel San Pietro Terme (BO)
Incontri con la Matematica XXXII,
16 - 17 - 18 novembre 2018

Direzione:
Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli.

Organizzazione scientifica e didattica dell'evento:
NRD di Bologna e Associazione *Incontri con la Matematica*.

Organizzazione economica e finanziaria:
Istituto Comprensivo 2 di Lucca, Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione degli insegnanti e **ForMATH Project.**

Con il patrocinio del Comune di
Castel San Pietro Terme

CITTÀ DI CASTEL S. PIETRO TERME

Conferenze

Venerdì 16 novembre, Centro Congressi Artemide. Tutti gli ordini scolastici.

14:00-14:45 Inaugurazione del convegno, saluti delle autorità politiche e accademiche. **Fausto Tinti** (Sindaco di Castel San Pietro Terme), **Fabrizio Dondi** (Assessore di Castel San Pietro Terme), **Mirko Degli Esposti** (Prorettore vicario dell'Università di Bologna), **Giovanni Dore** (Direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna), **Gino Carignani** (Dirigente IC 2 Lucca), **Paolo Negrini** (co-responsabile scientifico del NRD di Bologna), **Emilia Passaponti** (Redazione Giunti Scuola). **Bruno D'Amore** presenta il Convegno *Incontri con la matematica XXXII*. **Gabriele Gelatti** (artista, Genova) presenta la sua opera, esposta a Castel San Pietro Terme.

14:45-15:30 **Pierluigi Contucci** (Università di Bologna): La voce di Hilbert.

15:30-16:15 **Mirko Maracci** (Università di Pavia): L'uso dei software di geometria dinamica per l'insegnamento della geometria in una prospettiva verticale.

16:15-16:45 Pausa

16:45-17:30 **Pier Luigi Ferrari** (Università Piemonte Orientale): L'argomentazione tra matematica e lingua.

17:30-18:15 **Tullia Urschitz** (IC B. Lorenzi, Fumane, VR): È l'errore che ci fa progredire! Chi ha paura della matematica quando in classe c'è un robot?

18:15-19:00 **Ezio Fregnan** (Comau Academy Director) **e Gianluca Gastaldi** (Robotic Licence Project): Competenze e certificazioni STEM per la Quarta Rivoluzione Industriale: la collaborazione scuola–azienda.

Sabato 17 novembre, Centro Congressi Artemide. Scuola Primaria e Secondaria.

14:00-14:45 **Athanasios Gagatsis** (Università di Cipro): Perché adottiamo un approccio multidimensionale per l'apprendimento della geometria? [A seguire: consegna di un premio al PhD Prof. Athanasios Gagatsis per meriti scientifici].

14:45-15:30 **Ornella Robutti** (Università di Torino): Insegnanti che insegnano, insegnanti che imparano.

15:30-16:15 **Giorgio Bolondi** (Libera Università di Bolzano): Percorsi didattici digitali, in un'ottica di competenze.

16:15-16:45 Pausa

16:45-17:30 **Gabriele Zanardi** (Università di Pavia): Applicare le neuroscienze nella didattica: la valutazione formativa personalizzata che facilita l'apprendimento.

17:30-18:15 **Alessandro Bogliolo** (Università di Urbino): Matematica computazionale.

18:15-19:00 **Giuseppina Gentili** (IC Rotella, Montalto delle Marche, AP) **e Mauro Traversa** (Rizzoli Education): Apprendimento cooperativo nella didattica per competenze.

Sabato 17 novembre, Salone delle Terme. Scuola dell'Infanzia.

14:00-14:45 **Palma Rosa Micheli e Paola Vighi** (Università di Parma): Arte astratta, oggetti, azioni: come promuovere il pensiero geometrico.

14:45-15:30 **Agnese Del Zozzo** (RSDDM): Descrivere, classificare, riconoscere forme geometriche: resoconto di un'attività nella scuola dell'infanzia.

15:30-16:15 **Maurizia Butturini** (Direttrice di *Scuola dell'infanzia*, Giunti Scuola**)**: Apprendere vivendo. La cura dei gesti e delle cose, delle relazioni e dell'incontro con i linguaggi nella scuola dell'infanzia.

16:15-16:45 Pausa

16:45-17:30 **Tamara Lapucci e Barbara Vignoni** (Clementoni Spa e RoboTeach Recanati): Robotica educativa alla scuola dell'infanzia con Doc e Coko. Esperienze di buone pratiche nella didattica quotidiana. Dalla matematica a un approccio interdisciplinare.

17:30-18:15 **Elisabetta Robotti** (Università di Torino): Geometria alla scuola dell'infanzia: primi passi verso la definizione di circonferenza.

18:15-19:00 **Anna Aiolfi e Monica Bellin** (IC 1 Spinea, VE): Un tempo fatto di tempi: la costruzione del senso del tempo con i bambini dell'infanzia e della primaria.

Giovedì 15 novembre, Galleria Comunale di Arte Moderna di Castel San Pietro Terme, via Giacomo Matteotti, 79, Castel San Pietro Terme, ore 18:00.

Inaugurazione della mostra personale dell'artista Gabriele Gelatti: Il tempio d'oro.
In occasione del XXXII Convegno IcM, la Galleria osserverà il seguente orario di apertura: 16:00-20:00.
L'artista Gabriele Gelatti espone e presenta una selezione delle sue opere presso l'Hotel delle Terme, sala gialla: sabato 17 e domenica 18 novembre dalle ore 10 alle ore 12.

Seminari

Sabato 17 novembre, Anusca.
Seminari per la Scuola dell'Infanzia.

08:30-09:15 **Roberto Capone** (Università di Salerno), **Antonietta Esposito** (Università di Salerno) **e Maria De Filippo** (IC San Valentino Torio, SA): La didattica maker nella scuola dell'infanzia.
09:15-10:00 **Maria Elena Cazzetta** (RSDDM): La conoscenza del mondo: tutto cominciò con un punto …
10:00-10:30 Pausa
10:30-11:15 **Anna Angeli** (RSDDM): Gioco e matematica nella scuola dell'infanzia.
11:15-12:00 **Anna Aiolfi** (IC 1 Spinea, VE): Dalle grandezze ai numeri che non contano.

Sabato 17 novembre, Centro Congressi Artemide.
Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado

08:30-09:00 **Leonardo Tortorelli** (Pristem, Università L. Bocconi, MI): Geometriko: descrizione di un percorso didattico nella scuola primaria.
09:00-09:30 **Monica Panero** (Invalsi) **e Anna Maria Brunero** (Istituto Faà di Bruno, TO): Uso formativo delle prove Invalsi di matematica.
09:30-10:00 **Paola Vighi** (Università di Parma): Francesco Speranza, per non dimenticare.
10:00-10:30 **Beniamino Danese** (Reinventore): Esperimenti con materiali semplici per insegnare scienze e matematica.
10:30-11:00 Pausa
11:00-11:30 **Emanuela Ughi** (Università di Perugia): EUP - Una risorsa online per il laboratorio di matematica.
11:30-12:00 **Anna Mancuso** (IC 3 Bassano del Grappa, VI): Elettronica educativa per lo sviluppo del pensiero logico.
12:00-12:30 **Andrea Ferraresso** (CoderDojo Fossò, VE): L'evoluzione dell'apprendimento creativo della matematica dal Logo a Scratch e le prospettive future.
12:30-13:00 **Gian Marco Malagoli** (Sapyent): Dalle dita alla mente … Giocando con i calcoli.

Sabato 17 novembre, Hotel Terme, Salone delle Terme.
Seminari per la Scuola Secondaria di II grado e per l'Università.

08:30-09:00 **Maria Giovanna Frassia e Annarosa Serpe** (Università della Calabria): Il significato del problema in un'attività di modellizzazione matematica sulla derivazione di funzioni composte.
09:00-09:30 **Miglena Asenova** (Università di Palermo) **e Sergio Polidoro** (Università di Modena e Reggio Emilia): L'equazione di Laplace: una prospettiva storico-epistemologica. L'equazione di Laplace è davvero di Laplace?
09:30-10:00 **Giuseppa R. Cirmi, Salvatore D'Asero, Francesca Faraci e Maria Flavia Mammana** (Università di Catania): La lingua matematica.
10:00-10:30 **Cinzia Cerroni** (Università di Palermo): La storia della matematica in classe: percorso di storia e teoria della crittografia.
10:30-11:00 Pausa
11:00-11:30 **Gianfranco Gambarelli** (Università di Bergamo): La Teoria dei Giochi con i suoi "Nobel" e le sue applicazioni.
11:30-12:00 **Alessandro Cattaneo** (Mondadori Education): Matematica ricreativa, intuizione e deduzione.
12:00-12:30 **Davide Passaro** (LC Bertrand Russell, Roma): Laboratorio di matematica e coding: sviluppare il pensiero algoritmico utilizzando il linguaggio Python.
12:30-13:00 **Irene Papadaki** (Università di Cipro): Il primo libro d'abaco in greco moderno: produzione, circolazione, uso.

Domenica 18 novembre, Anusca.
Seminari per la Scuola dell'Infanzia.

08:30-09:15 **Ambra Coccia, Livia Alesi e Silvia Servili** (ISC Solari, Loreto, AN): 3D printing dalla scuola dell'infanzia … in poi.
09:15-10:00 **Francesca Rossetti** (Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia): Nel paese di Topigliano: prime esperienze di classificazione nella scuola dell'infanzia.
10:00-10:30 Pausa
10:30-11:15 **Pamela Cappellazzi e Viviana Pedersoli** (Assolo società cooperativa Onlus, Berzo Inferiore, BS): Mateamica. Un intervento strutturato di potenziamento delle abilità matematiche di base in bambini del 2° e 3° anno di scuola dell'infanzia.
11:15-12:00 **Michela Bettoni** (Gruppo Matematicando, Locarno): Tasselliamo con Pezzettino.

Domenica 18 novembre, Centro Congressi Artemide. Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado.

08:30-09:00 **Malvina Nurrito** (RSDDM): Mathewerkstatt: percorso a stazioni per lavorare in autonomia. Un'esperienza in classe.

09:00-09:30 **Mariamonica Cappelli** (IC Montecarlo, LU) **e Anna Angeli** (RSDDM): 1...2...3... giochiamo con le STEM.

09:30-10:00 **Gemma Carotenuto** (Università di Napoli Suor Orsola Benincasa), **Maria Mellone** (Università di Napoli Federico II) **e Rosa Di Bernardo** (State University of Campinas, Brasile): Interpretare le risposte degli allievi: sfida e risorsa irrinunciabile per promuovere un apprendimento attivo della matematica.

10:00-10:30 **Sonia Sorgato** (SP G. B. Perasso, Milano): Progetto *Classe Dinamica*. L'efficacia della didattica adattiva nella scuola primaria.

10:30-11:00 Pausa

11:00-11:30 **Tamara Lapucci e Barbara Vignoni** (Clementoni spa e RoboTeach Recanati): Matematica con Doc, Mind e Robomaker alla scuola primaria e secondaria di primo grado. Esperienze di buone pratiche nella didattica curricolare attraverso la robotica educativa.

11:30-12:00 **Anna Cerasoli** (Scrittrice): Buongiorno matematica.

12:00-12:30 **Pietro Di Martino** (Università di Pisa) **e Maria Pezzia** (GRSDM Pisa): Paura della matematica e paura di insegnarla: l'importanza per insegnanti e allievi di sviluppare uno spirito critico.

12:30-13:00 **Michele G. Fiorentino, Antonella Montone, Michele Pertichino e Giuditta Ricciardiello** (Università di Bari): Sacchetti, conigli e robot: dal gioco alla costruzione del significato di Numero Naturale.

Domenica 18 novembre, Hotel delle Terme, Salone delle Terme. Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado

08:30-09:00 **Luigi Tomasi** (Università di Ferrara): L'insegnamento/apprendimento di alcuni concetti del calcolo differenziale ed integrale nella scuola secondaria di II grado.

09:00-09:30 **Arianna Coviello** (MATHMOOC, Università di Torino) **e Giancarlo Scarsi** (LS Galileo Galilei, AL): Dalla catenaria alla pseudosfera: Geometrie, Architettura, Crocheting e Design.

09:30-10:00 **Francesca Gregorio** (Haute École Pédagogique Vaud, Losanna) **e Pietro Di Martino** (Università di Pisa): La crisi matematica: le difficoltà dei bravi in matematica nel passaggio all'università.

10:00-10:30 **Sara Martani, Maria Laura Rossi, Giulia Vighi e Laura Branchetti** (Università di Parma): Rappresentazioni degli intervalli e funzioni dal punto di vista di alcuni studenti liceali.

10:30-11:00 Pausa

11:00-11:30 **Chiara Andrà** (Politecnico di Milano), **Elena De Angelis** (Politecnico di Torino), **Roberto Natalini** (Consiglio Nazionale delle Ricerche), **Davide Palmigiani** (Università La Sapienza di Roma), **Nicola Parolini** (Politecnico di Milano) **e Davide Passaro** (LC Bertrand Russell, Roma): Fare matematica applicata a scuola: esperienze e riflessioni da EduSIMAI.

11:30-12:00 **Maria Guida** (INDIRE): Rendere visibile il pensiero degli studenti e il loro apprendimento in matematica.

12:00-12:30 **Ercole Castagnola** (Formatore T3: Teachers Teaching with Technology): La calcolatrice grafica all'esame di Stato e non solo … Alcuni esempi di utilizzo didattico.

Poster

Hotel delle Terme, sala Giardino.
Venerdì 16 dalle 17:00 alle 19:30;
Sabato 17 dalle 11:00 alle 14:30 e dalle 17:00 alle 19:30;
Domenica 18 dalle 10:00 alle 12:00.

Scuola dell'Infanzia

Annamaria Mighetti (IC Govone, Magliano Alfieri, CN): Un amico robotico. Esperienze matematiche all'infanzia con Blue-Bot.

Scuola Primaria

Gianfranco Arrigo (NRD)**, Marina Giacobbe** (SP Tomassetti, VB) **e Lorella Maurizi** (SP Peron, VB): I nostri amici numeri.

Maria Battù e Hedwige Pinto (Scuola Paritaria M. Mazzarello, TO): Tutti in... Circonferenza. Un approccio alla geometria con un'attività di *Peer Tutoring*.

Maria Elena Cazzetta (RSDDM): Quando il gioco non è solo divertimento.

Daniela Fognani e Maria Rita Benelli (IC G. Pascoli, Riolo Terme, RA): Inquadriamoci: giochi logici su griglie quadrate.

Gianluca Gabrielli (Università di Macerata) **e Maria Guerrini** (IC 20, BO): La rivoluzione dei consumi vista attraverso i problemi scolastici elementari. Prospettiva storica e analisi del presente.

Alessandro Lattanzi (Scuola Europea di Monaco) **e Chiara Giustini** (Scuola Europea di Varese): Giochi matematici. Un progetto di apprendimento e condivisione su eTwinning.

Raffaella Liera (SP Pesaro): Le misconcezioni in geometria: persistenza degli errori sistematici dalla scuola primaria all'università.

Paola Loviselli, **Chiara Donadoni**, **Giuliana Simonelli**, **Vilma Cartella e Anna Paterlini** (SP Scuola Audiofonetica, Brescia): Il laboratorio di educazione operazionale: se faccio, capisco.

Marzia Lunardi (IC Rivanazzano Terme, PV) **e Giuliana Lo Giudice** (LCLM Giorgione, Castelfranco Veneto, TV): La magia dei poligoni: un viaggio tra arte, coding e robotica educativa.

Loredana Mercadante, **Maria Benedetta Ferrario e Eleonora Folcio** (Coop Praticare il futuro, San Giuliano; Coop Il manto, CO; CNIS, MI): Stile di vita, tra rendicontazioni economiche e sociali. Potenziamento dei rapporti.

Cristina Sperlari (IC Uggiate Trevano, CO): Matematica e ... Percorsi matematici interdisciplinari.

Elisa Pratelli, **Sara Pratelli**, **Giacinto L. Verri** (IC Borgo di Terzo, BG) **e Antonio Criscuolo** (Università di Bergamo): Sagome – Artefare. Scienza Arte Geometria Origami Matematica Educare

Scuola Primaria e Scuola Secondaria di I grado

Stefania Ghiotto (IC Claudio Casteller, Paese, TV): La settimana del Pi greco.

Scuola Secondaria di I grado

Alessia Brunetta e Gabriella Teso (IC C. Casteller, Paese, TV): Ricette francesi e proporzioni. Resoconto di un'attività CLIL.

Ilenia Cosa e Lucia Del Chiaro (IC Botticelli, FI): Calcolo frazionario con il Tangram (addizione e sottrazione).

Roberta Faziani e Tiziana Franzoni (IC G. Pascoli, Riolo Terme, RA): Geometria Sheer. Utilizzo della trasparenza nello studio della geometria.

Caterina Ferri (GRSDM PI): Percorso didattico: una banana bicentenaria.

Eliana Imperatore e Philip Hubert (Collegio Papio, Ascona, Svizzera): I pc contano con due dita.

David Lognoli (SS Giovanni da Verrazzano, Greve in Chianti, FI): La matematica delle elezioni.

Scuola Secondaria di II grado e Università

Alessandra Angelucci (LS J. F. Kennedy, Roma): Elementi di Analisi già in terza e quarta liceo.

Giovanni Lodi (IC 17 Gandino-Guidi, BO): Lupo Giocondo e i sette porcellini.

Elisabetta Morini (LS Aldo Moro, RE): Geometria e logica con i post-it, per una matematica che non fa una piega.

Tullia Norando e Paola Magnaghi Delfino (Politecnico di Milano): Conversazione con Maria Gaetana Agnesi: donna, matematica, milanese.

Tullia Norando e Paola Magnaghi Delfino (Politecnico di Milano): MatemArtiAmo.

Roberto Natalini (IAC-CNR), **Davide Palmigiani** (Università La Sapienza di Roma) **e Davide Passaro** (LS Bertrand Russell, Roma): Le potenzialità didattiche in matematica e fisica del notebook Jupyter: tra coding, scrittura testi scientifici e analisi dei dati.

Davide Rizza (University of East Anglia, Norwich, UK): Un incontro con l'aritmetica dell'infinito.

Annachiara Quer (IPSIA Galileo Galilei, Castelfranco Veneto, TV): La matematica: da passione-sofferenza a passione-grande interesse.

Ilaria Veronesi (LS P. S. Mancini, AV), **Paola Pugliese** (LS P. S. Mancini, AV), **Francesco Saverio Tortoriello** (Università di Salerno) **e Roberto Capone** (Università di Salerno): Un Museo per la Matematica: Artefatti e percorsi didattici tra macchine matematiche e indovinelli logici.

Tutti i livelli scolastici

Agostino Recchia (Inventore di giochi) **e Dario Uri** (Metagrobologo): Giochi e puzzle matematici per tutti i livelli scolastici.

Camilla Spagnolo (Università di Urbino): La realizzazione di un curricolo verticale per migliorare le competenze in matematica.

Informazioni

Verrà rilasciato un **attestato** per n° 20 ore di **Aggiornamento**, in base alla CM 376, prot. 15218, del 23 12 1995 e successive modifiche. In caso di frequenza parziale al Convegno, verrà comunque rilasciato un attestato per il numero di ore di presenza effettive.

Per avere ulteriori **informazioni di tipo logistico**, ci si può rivolgere a:
Ufficio Cultura - Comune di Castel San Pietro Terme (BO)
P.zza XX Settembre, 3 - Castel San Pietro Terme (BO) - 40024
dal lunedì al venerdì: ore 9.00 - 13.00 (giovedì anche 15.00 - 17.45)
Tel. 051.6954127 / 150 - FAX 051.6954179 - cultura@cspietro.it

Per avere maggiori **informazioni tecniche e scientifiche** sul Convegno, si consiglia di fare riferimento ai siti sotto elencati:
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

Per avere ulteriori **informazioni sulla modalità d'iscrizione** rivolgersi a:
Elena Franchini cell: 3393225002 e-mail: **convegno@formath.it**

Il Convegno è aperto a tutti.

Procedura di iscrizione con e senza Bonus

Per poter iscriversi al convegno è necessario compilare il modulo d'iscrizione con tutti i dati richiesti alla pagina **www.formath.it/convegno**, allegando copia del pagamento dell'iscrizione (ricevuta del bonifico) o del "Buono" generato con la carta del docente.

per chi USUFRUISCE del Bonus Scuola

Iscrizione presso piattaforma digitale.
Il docente, accedendo al sito **https://cartadeldocente.istruzione.it**, troverà la guida che indica come effettuare le necessarie operazioni.
Entrando con le proprie credenziali nel sito, potrà predisporre un "Buono" di
€ 90,00 per chi si iscrive dal 1° luglio al 31 luglio
€ 95,00 per chi si iscrive dal 1° agosto al 30 settembre
€ 100,00 per chi si iscrive dal 1° ottobre al 10 novembre
a favore di *"Formazione e aggiornamento. Percorsi formativi Istituzioni Scolastiche"*.
Effettuata tale operazione, otterrà una pagina in pdf, da stampare, che contiene il nominativo del docente, l'importo e il codice del "Buono".
Per effettuare l'iscrizione al Convegno è necessario allegare al modulo d'iscrizione, opportunamente compilato, il file pdf del "Buono".
A seguito della regolare ricezione di quanto sopra e della validazione del "Buono", verrà inviata entro qualche giorno una e-mail di conferma dell'iscrizione.
Al momento dell'accoglienza al convegno, sarà necessario, come conferma, consegnare la stampa cartacea del "Buono" o esibirne l'immagine digitale.
Non sarà possibile in alcun caso ottenere il rimborso del "Buono".

per chi NON USUFRUISCE del Bonus Scuola

Importo da versare
€ 90,00 per chi si iscrive dal 1° luglio al 31 luglio
€ 95,00 per chi si iscrive dal 1° agosto al 30 settembre
€ 100,00 per chi si iscrive dal 1° ottobre al 10 novembre
tramite:
bonifico bancario da intestare a: ForMATH Project srl
coordinate bancarie:
IBAN: IT 80 S 05034 02421 000000023464
CODICE SWIFT: BAPPIT21M60
CAUSALE: Iscrizione convegno Incontri con la Matematica n. 32 del 2018.

Per effettuare l'iscrizione al Convegno è necessario allegare al modulo d'iscrizione, opportunamente compilato, il pdf comprovante l'avvenuto pagamento.
A seguito della regolare ricezione di tale documentazione, verrà inviata entro qualche giorno una e-mail di conferma dell'iscrizione.
Al momento dell'accoglienza al convegno, sarà necessario, come conferma, consegnare la stampa cartacea dell'avvenuto pagamento o esibirne l'immagine digitale.
Non sarà possibile in alcun caso ottenere il rimborso della quota di iscrizione versata.

I **posti disponibili** sono 900. Una volta raggiunto tale limite, verrà data comunicazione nei siti dedicati al convegno e nella pagina **www.formath.it/convegno**; oltre tale limite non verranno accettate altre iscrizioni. **Si prega dunque di controllare se c'è ancora posto, prima di effettuare il pagamento**.
Per accedere alla sala del convegno bisogna presentarsi con un documento di identità; verrà riscontrata l'iscrizione, rilasciato un pass e consegnata una borsa (contenente materiali vari) offerta da Giunti Scuola.
L'accesso al convegno inizia venerdì 16 novembre alle ore 13.
La **Segreteria** ha sede nella sala d'ingresso del centro congressi Artemide, viale delle Terme 1010B; è aperta nei seguenti orari:
venerdì 16 novembre: dalle 13:00 alle 19:30
sabato 17 novembre: dalle 08:00 alle 19:30
domenica 18 novembre: dalle 08:00 alle 13:30.

Gli Atti, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, saranno posti in vendita nello spazio di Pitagora Editrice fin dal giorno della inaugurazione.

Per tutta la durata del Convegno saranno attivi **servizi di trasporto gratuito** in orari prestabiliti tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro Terme.

I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla **prenotazione alberghiera**. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

Ricettività Alberghiera nel territorio di Castel San Pietro Terme

ALBERGHI

HOTEL CASTELLO****	Viale Terme, 1010/b - 051 943509 - info@hotelcastello.com
ANUSCA PALACE HOTEL****	Viale Terme, 1058 - 051 948824 - info@anuscapalacehotel.it
ARLECCHINO***	Via Della repubblica, 23 - 051 941835 - info@arlecchinocspt.it
ALBERGO DELLE TERME***	Viale Terme, 1113 - 051 940078 info@albergodelleterme.com
IL GALLO ***	Viale Della Repubblica, 34 - 051 941114 - info@hotelilgallo.it
GEST HOTEL (HOTEL PARIGI)***	Viale Terme, 860 - 051 6942027 info@hotelparigionline.com
ORTICHI CLAUDIO (PARK HOTEL)***	Viale Terme, 1010 - 051 941101 info@parkhotelcastelsanpietroterme.eu
DINO S.N.C. (ALBERGO DUE PORTONI)**	Via Mazzini, 133 - 051 941190 gialonzo@libero.it
TERANTIGA***	Via De' jani, 11 - 051 6957234 - info@terantiga.com
LA TORRETTA* SUPERIOR**	Viale Terme, 1559 - 051 6942141 - info@latorrettahotel.it
LOCANDA OSTERIA DA CESARE	Via Tanari, 5418 - 051 941202 osteriadacesare@virgilio.it
LOCANDA POSITANO SOLE E MARE	Viale Vittorio Veneto, 1 - 051 941236 - info@maraz.it
PALAZZO DI VARIGNANA** SUPERIOR**	Via Ca' Masino, 611 - 051 19938300 info@palazzodivarignana.it

AGRITURISMI

VINEA REGUM (ristorazione e pernottamento)
Via Croce Conta, 1520 - 051 940707-334 9798410 - info@vinearegum.it

COLOMBARA (solo ristorazione)
Via Emilia Levante, 2866 - 051 942095 - 339 3448493 - lorenzo@agriturismocolombara.it

AZIENDA AGRITURISTICA SAN MARTINO (solo ristorazione)
Via Tanari, 7493 - 051 949766 - 330 394303

LA CORTE DEGLI STRUZZI DI COMELLINI ANDREA (solo ristorazione)
Via Corlo, 120 - 340 9477388 - lacortedeglistruzzi@libero.it

MOLINO NUOVO (pernottamento e colazione) - Viara, 3219 - 339 7676094

BED & BREAKFAST

B&B VILLA LENZI	Via Della Repubblica, 69 - 051 941166 - 333 8042920 info@villalenzi.it
B&B CASA CLARA	Via Berlinguer, 101 - 051 948851 - 338 4691859 giampaolo@trasparente.it
B&B LA GAIANA DI FRANCESCA D'ANNUCCI	Via Emilia Ponente, 3201/a 051 946042-348 2114281 - info@lagaianabeb.it
B&B RED WINE COUNTRY HOUSE DI AVANZI GIAMPAOLO	Via Irma Bandiera, 112 - 348 4297770 avanzigp@gmail.com
B&B IL SASSARELLO	Via Ca' Masino, 3541/a - 327 5835293 - silla43@tiscali.it
B&B IL GIRASOLE	Via Berlinguer, 36 - 338 4993970 - info@ilgirasolecastello.it
B&B VILLA RESTA	Via Mascarelle, 350 - 335 6834721 - luminasi@aon.at
B&B GALLO DI PERNA SALVATORE	Via Emilia Ponente, 3380-7 - 347 6765385 - crisperna@iol.it
B&B VILLA RINIERA DI NICCOLO' MALASPINA	Via Riniera, 2043 - 339 5257648 nmalaspina@arubapec.it
B&B PARCO DEI CAVALLI	Via Tanari, 4540/a - 051 6522719
B&B A CASA DI CESARE MAZZACURATI	Via Tanari, 5390

SPONSOR

GIUNTI Scuola

Pearson

DeA SCUOLA

MONDADORI EDUCATION

Rizzoli EDUCATION

Media Direct MEDIA DIRECT srl

CampuStore

LEGO education

Clementoni

Erickson

pitagora editrice

Sapyent

reinventore.it

Artebambini

tipografia F.lli CAVA srl
www.tipografiacava.it

MINERVA LIBRI Verona
www.minerva-libri.it

INFORMAZIONI TURISTICHE

UIT (Ufficio Informazioni turistiche) - Ufficio Turismo e Cultura
Piazza XX Settembre n. 4 - tel. 051.6954.127 – 112 – 214; fax: 051.6954.179; orari di apertura dal lunedì al venerdì dalle ore 9:00 alle ore 13:00 e il giovedì anche dalle ore 15:00 alle 17:45; e-mail: uit@cspietro.it - ufficioturismo@cspietro.it www.cspietro.it - www.comune.castelsanpietroterme.bo.it.

Pro Loco
Via Ugo Bassi, 19 - 40024 Castel San Pietro Terme (BO), tel. 051.6954135; fax 051.6951379; info@prolococastelsanpietroterme.it.

RECENSIONI
SCHEDE BIBLIOGRAFICHE
E NOTIZIE

Achille Maffini (2017). *Didattica delle equazioni: una proposta*. Prefazione di Carlo Marchini. Bologna: Pitagora.

Parliamoci chiaro: se c'è una cosa che sembra facilissima da insegnare e da apprendere in matematica è proprio il concetto di equazione. Adattarlo all'ordine di scuola, alla classe, al singolo studente, in relazione agli obiettivi specifici che si vogliono raggiungere, sembra alla portata di qualsiasi insegnante di matematica, una sfida piacevole e coinvolgente, pure divertente. Ebbene, se siete insegnanti, ingegneri, medici, avvocati… convinti di tutto ciò allora questo libro è per voi. A maggior ragione se siete studenti o ex-studenti che, pur non avendo incontrato particolari difficoltà nella gestione delle equazioni, hanno provato un senso di profonda insoddisfazione di fronte a certe definizioni, principi, trattamenti, interpretazioni o spiegazioni, e hanno tuttora l'impressione di non aver capito bene tutto fino in fondo. Se siete persone curiose o desiderose di approfondire gli aspetti più nascosti e intriganti del mondo delle equazioni, quelli che sfuggono alla usuale trattazione offerta dai manuali scolastici, non potete lasciarvi sfuggire questo libro.

Il percorso tracciato dall'autore riguarda nello specifico le equazioni algebriche razionali, ma attenzione, nel libro non si parla solo di equazioni (numeriche, letterali, parametriche, reciproche, trinomie…), ma anche di monomi, polinomi, identità, sistemi di equazioni, problemi parametrici, anti-equazioni, funzioni, finzioni e altro ancora. *Finzioni?* Sì, proprio così, ma non si tratta di imbrogli, inganni… o scherzi dell'autore. Il termine *finzione* è utilizzato per includere e richiamare in maniera assonantica sia il nome sia il concetto di funzione nel designare una relazione binaria funzionale. Infatti, non tutte le "finzioni" sono "funzioni". A differenza di una funzione, una finzione non è necessariamente ovunque definita, perché gli elementi del suo dominio hanno *al più* un'immagine nel codominio. In virtù di ciò, il concetto di finzione permette di interpretare e chiarire numerosi aspetti dell'oggetto "equazione", per nulla banali o superflui, spesso nascosti nell'usuale prassi didattica, ma essenziali per comprendere a fondo la complessità della sua gestione, sia come *oggetto istituzionale* (Chevallard, 1985), sia come traduzione o modellizzazione di un problema, anche parametrico. Ecco allora che, dopo aver preso in esame la relazione tra equazione e problema, l'autore analizza in profondità la natura dell'oggetto "equazione" dal punto di vista morfologico, semantico e sintattico, e i suoi legami con l'oggetto "funzione". Tutto ciò grazie, soprattutto, all'uso di *finzioni di sostituzione, di parametrizzazione*, *di valutazione* e *soluzione*, che permettono di definire diversi tipi di equivalenza: morfologica, sintattica, semantica, e pure strutturale. La definizione di equazione a cui giunge, su basi sia logiche sia applicative, risulta molto articolata ed elaborata. Per averne un'idea, senza entrare nei dettagli, diciamo solo che un'equazione è definita mediante una particolare terna (o coppia) costituita da: (1) una *proposizione* di un contesto algebrico, (2) una *finzione di parametrizzazione* (che può essere omessa, se non necessaria), (3) un *dominio* (relativo alle variabili non parametri presenti nella proposizione che individua l'equazione). Il percorso che conduce a una tale definizione, avverte l'autore, è particolarmente complesso, improponibile a livello di scuola secondaria. Esso, tuttavia, a un livello adulto e colto, offre interessanti ed efficaci strumenti concettuali, logici e cognitivi di analisi e di gestione delle ambiguità o insidie concettuali che si celano nelle varie definizioni, principi, procedimenti risolutivi, apparentemente semplici e innocui, inerenti al mondo delle equazioni (e non solo) comunemente utilizzati o condivisi a livello di scuola secondaria, in particolare:

- nelle definizioni di monomio, grado di un monomio, coefficiente di un monomio, equazione (numerica, letterale, parametrica…) e sua forma normale, dominio di un'equazione, condizioni di esistenza, equazione impossibile, determinata o "indeterminata";
- nell'uso di variabili, incognite e parametri, spesso confusi tra loro;
- nei cosiddetti "principi" di equivalenza;
- nell'uso improprio di determinati simboli o nell'abuso di formulazioni ambigue;
- nelle sostituzioni come procedure risolutive;
- nelle trasformazioni sintattiche in relazione a diversi ambiti o domini, spesso sottintesi.

La definizione di monomio è nota a tutti; in essa si assume implicitamente che le lettere abbiano tutte lo stesso ruolo. Ma cosa succede se un monomio è considerato come un termine di un'equazione parametrica? Per esempio, nell'equazione $\left(k-1\right)x^2+\left(5k-3\right)x+5-k=0$, cosa si può dire del termine $\left(k-1\right)x^2$? Lo possiamo considerare come un'espressione algebrica costituita da un coefficiente numerico e da una parte letterale? Se sì, tra le lettere della parte letterale, compaiono solo moltiplicazioni ed elevamenti a potenza con esponente naturale? Come rileva l'autore, la gestione delle equazioni parametriche richiede "un cambio di prospettiva radicale per uno studente poiché non solo lo obbliga a vedere un 'numero' dove c'è una 'lettera' (o addirittura una scrittura ben più complessa), ma anche, soprattutto, a modificare radicalmente il concetto di monomi simili" (p. 112). Da qui la necessità di un lavoro specifico sul concetto di parametro e sui diversi ruoli che possono avere le lettere che compaiono nella proposizione che individua un'equazione, anche per una gestione adeguata e consapevole, per nulla banale, della cosiddetta forma "canonica" (o "normale") delle numerose equazioni che si incontrano a livello di scuola secondaria.

A proposito di lettere, non pochi studenti manifestano un certo disagio, imbarazzo, o comunque insoddisfazione nel manipolare lettere morfologicamente diverse dalla "*x*". Anzi, non è rara l'identificazione dell'incognita o della variabile di un problema con la lettera "x". Come se l'informazione racchiusa da un problema o da un'equazione e la loro risoluzione dipendessero dalla forma della lettera utilizzata, vale a dire da questioni puramente morfologiche. Come mai?

Gli aspetti morfologici di un'equazione riguardano in generale la forma della proposizione che individua l'equazione, forma che nelle procedure risolutive è vincolata a particolari sostituzioni; gli aspetti sintattici sono strettamente legati alle proprietà delle relazioni coinvolte e della struttura numerica nella quale si considera l'equazione; mentre gli aspetti semantici sono inerenti alla determinazione delle soluzioni dell'equazione in un dato insieme. Come rileva l'autore, gli aspetti morfologici del concetto di equazione sono di solito ritenuti meno rilevanti, anche didatticamente, rispetto a quelli sintattici e semantici, dunque spesso trascurati o sottintesi. In particolare, nella risoluzione delle equazioni si insiste soprattutto sull'uso corretto dei cosiddetti "principi" di equivalenza, principi (o meglio teoremi) nei quali si condensano l'equivalenza sintattica e quella semantica. L'identificazione degli aspetti morfologici con quelli sintattici o semantici non è dunque rara, e può ostacolare fortemente la gestione delle equazioni (e non solo). Dal punto di vista semio-cognitivo, essa corrisponde all'identificazione degli aspetti iconico-qualitativi di una rappresentazione semiotica dell'oggetto "equazione" nel registro algebrico con altri aspetti, in particolare con quelli iconico-strutturali, indicali, o simbolici.

Numerosi sono gli esempi che l'autore fornisce a sostegno della sua riflessione teorica, anche sulla base della sua lunga esperienza di insegnante. Vediamone brevemente alcuni che riguardano l'equivalenza morfologica, sintattica e semantica.

Le equazioni in $\mathbb{R}$ individuate da $x+1=3$ e $y+1=3$ "sono equivalenti semanticamente, ma non morfologicamente, a meno che non si possa sostituire la x con la y (o viceversa)" (p. 43). Anche le equazioni individuate da $x+2y=3$ e $2y+x-3=0$ non sono morfologicamente equivalenti in assenza di informazioni sulle proprietà delle operazioni coinvolte, di natura prettamente sintattica; tuttavia, esse sono semanticamente equivalenti in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nel senso che ogni coppia di numeri reali che soddisfa la prima uguaglianza soddisfa anche la seconda, e viceversa; in altre parole, le rispettive finzioni di valutazione sono uguali.

Le equazioni individuate da $x-2=0$ e $(x-2)^2=0$ in $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti, ma non sintatticamente equivalenti, perché non è possibile moltiplicare (rispettivamente dividere) entrambi i membri della prima (rispettivamente della seconda) equazione per $x-2$.

Che dire poi delle equazioni individuate da $x = 1$ e da $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$? In $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti? Sono sintatticamente equivalenti? Per carità, non sveliamo troppo…

Da questi e numerosi altri esempi emerge con forza il ruolo centrale che assume la gestione degli aspetti morfologici, sintattici, semantici, e più in generale semiotici, nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica. Gli studi e le ricerche in didattica della matematica l'hanno evidenziato ampiamente in numerosi lavori di ricerca sin dagli anni '80 (Duval, 1988a, 1988b, 1988c), e continuano a fornire in ambito semio-cognitivo chiavi di lettura sempre più raffinate, articolate, profonde e concrete (si veda, per esempio: D'Amore, 2006; Duval, 1995, 2017).

Nella prefazione, Carlo Marchini, uno dei massimi logici italiani, dichiara di aver intrapreso gli studi di matematica proprio per capire meglio e di più questi e altri "misteri". E si vanta con orgoglio di essere riuscito a trasmettere la sua "insoddisfazione" su ciò che sapeva a uno dei suoi studenti, Achille Maffini. "Questo testo ne è una prova perché in esso molte delle domande che mi ponevo trovano una risposta approfondita" (p. 11). Domande che si pongono anche tanti altri studenti e insegnanti.

Riferimenti bibliografici

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557–583.

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 235–253.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Maura Iori

Gabriele Lolli (2018). *Matematica come narrazione: Raccontare la matematica*. Bologna: il Mulino.

Roland Barthes in *Letteratura contro scienza* (1967) scrive che "le due culture" sono destinate a contrapporsi senza possibilità di dialogo: la letteratura utilizza il linguaggio con la consapevolezza che esso non è mai neutro né trasparente, cioè non è mai solo uno strumento per veicolare un contenuto di "realtà" esterno al linguaggio stesso; la scienza usa il linguaggio in modo referenziale, come se fosse un semplice strumento per esprimere "realtà" esterne ad esso. Italo Calvino (1968) non fa attendere a lungo una sua acuta e contundente risposta:

> Ma la scienza d'oggi può essere definita davvero da questa fiducia in un codice referenziale assoluto, o non è essa stessa ormai una continua messa in discussione delle proprie convenzioni linguistiche? E – almeno per quel che riguarda la matematica – piuttosto che alla pretesa di fondare un discorso su una verità esterna ad esso, ci troviamo di fronte a una scienza non aliena dal giocare col proprio processo di formalizzazione (...). Va valorizzato (...) il posto che il pensiero matematico sta prendendo nella cultura anche umanistica e quindi nella letteratura. (Calvino, 1968, p. 69)

A confermare la sua visione del connubio fra linguaggio della scienza e linguaggio della letteratura, Calvino (1967) aveva dichiarato che:

> Galileo è il più grande scrittore della letteratura italiana di ogni secolo. Galileo usa il linguaggio non come uno strumento neutro, ma con una coscienza letteraria, con una continua partecipazione espressiva, immaginativa, addirittura lirica. (...) Galileo ammirò e postillò quel poeta cosmico e lunare che fu Ariosto; (...) Leopardi nello *Zibaldone* ammira la prosa di Galileo per la precisione e l'eleganza congiunte. (Calvino, 1967, p. 11)

Si noti: il più grande scrittore della *letteratura* italiana; non di linguaggio scientifico si sta parlando, dunque, ma letterario.

Queste frasi perentorie, che scatenarono un'ondata di critiche nel mondo della letteratura italiana, prima fra tutte quella di Carlo Cassola, appaiono in un famoso articolo di Calvino pubblicato sul *Corriere della Sera* il 24 dicembre 1967.

Tale opinione sulla lingua letteraria di Galileo è confermata dal linguista e storico della letteratura Francesco Bruni (nel 1984); dalla grande linguista, membro della Crusca, Maria Luisa Altieri Biagi (nel 1985); da Alberto Asor Rosa (nel 1993); e da tanti altri famosi studiosi di letteratura italiana; ma era già stata anticipata da una dichiarazione analoga del filologo e linguista Bruno Migliorini (nel 1960).

Uno scienziato eletto a narratore! Il suo linguaggio scientifico assunto come narrativo.

Abbiamo potuto constatare negli anni che pochi sanno che Galilei fu anche critico d'arte figurativa di grandissimo livello, che stroncò i lavori del

Parmigianino (Girolamo Francesco Maria Mazzola), del Bronzino (Agnolo di Cosimo di Mariano) e di Annibale Carracci; e lodò invece molto l'opera di Raffaello Sanzio, Giorgione, Giorgio da Castelfranco e Tiziano Vecellio. E fu critico di poesia stimatissimo delle opere di Dante Alighieri, Francesco Petrarca, Ludovico Ariosto, Torquato Tasso, ma anche dotto commentatore di opere più antiche, come quelle di Tito Maccio Plauto e Quinto Orazio Flacco. Su pressione del padre, fu anche studioso di musica (dal punto di vista fisico) e di musicologia, dal punto di vista critico-artistico. Un suo brano di altissimo pregio puramente letterario si trova nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*:

> Quei tratti tirati per tanti versi, di qua, di là, in su, in giù, innanzi, indietro, e 'ntrecciati con centomila ritortole, non sono, in essenza e realissimamente, altro che pezzuoli di una linea sola tirata tutta per un verso medesimo, senza verun'altra alterazione che il declinar del tratto dirittissimo talvolta un pochettino a destra e a sinistra e il muoversi la punta della penna or più veloce ed or più tarda, ma con minima inegualità. (Galilei, 1992, Giornata Seconda, p. 199)

Tanto che, nel *Barone Rampante*, così Calvino (1957) si … ispira … al Galilei letterato:

> Questo filo d'inchiostro, come l'ho lasciato correre per pagine e pagine, zeppo di cancellature, di rimandi, di sgorbi nervosi, di macchie, di lacune, che a momenti si sgrana in grossi acini chiari, a momenti si infittisce in segni minuscoli come semi puntiformi, ora si ritorce su se stesso, ora si biforca, ora collega grumi di frasi con contorni di foglie o di nuvole, e poi s'intoppa, e poi ripiglia a attorcigliarsi, e corre e corre e si sdipana e avvolge un ultimo grappolo insensato di parole idee sogni ed è finito. (Calvino, 1957, p. 263)

Dunque, è fatta: linguaggio narrativo e linguaggio scientifico non sono agli opposti, ma interagiscono e si influenzano reciprocamente.

Al momento dello scontro fra Barthes e Calvino e poi fra Calvino e Cassola, era già nato e si era imposto il gruppo (soprattutto francese) OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle, Officina di Letteratura Potenziale) fondato nel 1960 dal poeta e scrittore Raymond Queneau e dal matematico François Le Lionnais, con la partecipazione di altri matematici, poeti e romanzieri, fra i quali lo stesso Calvino. Molto scalpore crearono le regole algebriche per la scrittura di testi letterari.

Ma la domanda resta sempre viva: Si può *narrare* la matematica? La risposta è banalmente positiva: certo, basta prendere in esame un testo di storia della matematica; ma non un testo di vera storia, scritta da storici specialisti, perché questo sarebbe per molti di nuovo un esempio di linguaggio scientifico molto denso e specifico, vera ricerca scientifica; intendiamo dire un testo dove si narra la storia della matematica, delle idee matematiche, dei personaggi della matematica, scritto proprio per raccontare. E allora la risposta positiva è banale, troppo scontata.

Vogliamo chiedere di più: È possibile *considerare la matematica come narrazione*? E qui entra in campo questo libro di Gabriele Lolli che dà una risposta positiva convincente e determinante, rivoluzionaria. Sì, perché le tecniche del ragionamento, scrive l'autore sono nate dalla retorica e dalla poesia greca: "Ogni dimostrazione diviene allora la storia di un viaggio in un paese sconosciuto, alla ricerca di nuove strade di collegamento". E il fascino di questa affermazione ti conquista fin dalla copertina del libro e segue, convincente, nei vari capitoli. I grandi racconti della matematica sono quelli, per esempio, del lavoro di Cantor e della conquista letteraria dell'universo degli insiemi, la narrazione dei gruppi algebrici connessi alle geometrie, la conquista dell'infinito, il programma di Robert Langlands, uno dei temi più complessi e affascinanti della matematica contemporanea. Come si usano le (necessarie) metafore in matematica, che relazione c'è fra una dimostrazione e una storia. Che cosa sono dal punto di vista epistemologico gli oggetti (enti) della matematica, le dimostrazioni dinamiche, come funzionano le etimologie nella narrazione matematica. Chi sono gli eredi moderni di Platone e di Aristotele e come funzionano le loro narrazioni. Come intendere il linguaggio matematico, solo come uso dei simboli e loro significati o anche come la necessità di seguire le regole che si impongono usando le formule. Come si passa dalla poesia narrativa di Omero alla retorica e al suo uso in matematica. Quanto in Euclide è poesia e quanto è logica e quanto è tutt'e due, senza differenza alcuna.

Ogni capitolo di questo libro è una scoperta che ti lascia di stucco. Ma colpisce molto l'unica frase che campeggia nella IV di copertina: "La poesia dice di più con meno parole. Anche la matematica". Esempio?

"Ognuno sta solo sul cuor della terra
trafitto da un raggio di sole:
ed è subito sera."

17 parole. Chi non le conosce? Chi di noi non le ha imparate a memoria? Chi di noi non è rimasto senza fiato, la prima volta che le ha lette?

In altra occasione ci azzardammo a paragonare questi versi stupendi immortali a una definizione che si pone alla base dello studio dell'infinito in matematica:

"Un insieme si dice infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria".

17 parole. Il caso?

Per spiegare la poesia del premio Nobel Quasimodo un critico letterario ricorre a una discreta quantità di pagine; la narrazione epica drammatica descritta nei tre versi racchiude un'intera vita umana, se non più, la considerazione stessa della vita, il suo senso, millenni di storia e di esperienza. La definizione matematica racconta una storia di quasi 3000 anni, dai primi vagiti sull’ápeiron di scuola taletiana alla formulazione di Dedekind (forse già intuita da Galileo).

Due narrazioni intrinseche, entrambe ricche di profondo fascino.

Il lettore si sarà certamente accorto che il testo scritto finora si presenta come una argomentazione a favore della tesi *La matematica può essere vista come una narrazione*; tale argomentazione è stata condotta partendo da argomenti più distanti, apparentemente assai più marginali, che in realtà sono serviti per escludere interpretazioni del “narrare la matematica” che potrebbero portare fuori dalla traiettoria che si stava seguendo, e arrivando infine al cuore della questione, suffragando la posizione sostenuta con esempi, con dei “fatti”. Qualche lettore troverà l’argomentazione convincente, saprà forse esplorare altri percorsi di ragionamento, saprà portare altri argomenti ed esempi a favore; qualcun altro sarà dubbioso e troverà argomenti che la contraddicono, portando esempi che confermano il suo alternativo punto di vista. Tuttavia, non sarà probabilmente difficile convenire sul fatto che le argomentazioni matematiche sono diverse da quelle usuali o da quelle di altri territori, anche se spesso non è facile spiegare in che cosa tale differenza consista davvero. Come nota Lolli, se la matematica è una narrazione di fatti, allora essa è un discorso-narrazione rigidamente vincolato nella sua struttura; per poter essere sostenuta, questa tesi della matematica come discorso-narrazione necessita di un particolare convincimento: che certi tipi di fatti ammettano descrizioni solo in forma di dimostrazione, di quella che usualmente si intende con dimostrazione (Lolli, 1988, p. 76). Se pur riuscissimo a fare buona opera di persuasione e il lettore dovesse/volesse convenire con noi su questo aspetto (che tra i lettori matematici incontrerebbe probabilmente poca resistenza), esso non aiuterebbe molto a chiarire il concetto della matematica come narrazione: l’unica differenza che apporterebbe tale opera di persuasione sarebbe quella di un accordo tra i partecipanti sul poter appendere a ogni dimostrazione l’etichetta “narrazione matematica”. E in effetti, il punto della questione non è questo, è un altro:

> la teoria intesa come spiegazione dei fatti ricorda momenti di scientismo che sono meglio rappresentati nella tradizione del romanzo poliziesco che in quella scientifica (...); normalmente sono i fatti che sostengono le spiegazioni e non viceversa. (...) La posizione della matematica è però molto diversa: è la matematica che crea i fatti, non una descrizione che si adatta ad essi. (Lolli, 1988, p. 77)

Dunque, la narrazione matematica non è una dimostrazione della verità di una congettura su certi fatti, ma è la narrazione della congettura dei fatti stessi nonché della convalida di tale narrazione. Vista così, l’impresa narrativa matematica è un racconto grandioso, creativo, che crea il proprio oggetto mentre lo narra; un racconto che narra la propria creazione, in un affascinante gioco che fa scorrere la trama su una superficie simile alla bottiglia di Klein, nella quale interno ed esterno si confondono e sono una cosa sola.

Ma i discorsi sono fatti dagli esseri umani e le narrazioni sono narrazioni di qualcosa e quindi anche la narrazione matematica non è fine a sé stessa; essa è il/un processo di/per dare-senso-alla matematica. Lolli osserva che particolarmente pertinente per la matematica è il modello della fiaba perché le fiabe

> sono un deposito di mondi inventati, mondi in parallelo o intrecciati a quello in cui viviamo, senza temere le palesi incoerenze (...). Come ogni fiaba struttura una storia inserendo in modo originale nuovi personaggi (...) nei moduli ricorrenti del genere, così ogni nuovo concetto astratto è il protagonista di una teoria diversa sostenuta dalle tecniche generali del ragionamento matematico. (Lolli, 2018, p. 12)

Dunque la coerenza dei mondi matematici, così come quella dei mondi delle fiabe, non deriva dalla loro corrispondenza con una qualche realtà empirica o con il senso comune; anzi, spesso questi mondi sono incoerenti secondo tali criteri; la coerenza dei mondi immaginifici fiabeschi o matematici è sostenuta dalla loro stessa struttura ricorrente (Propp, 1966). Infatti, citando Calvino, Lolli nota che le strutture narrative sono considerate dalla critica come esistenti per conto loro, ma si spinge ancora oltre, aprendo una nuova porta nella interpretazione della narrazione matematica, interpretazione nella quale tali strutture non solo esistono per conto loro, ma "forse le hanno precedute, e forse prefigurate" (Lolli, 2018, p. 13).

In questo senso la narrazione matematica è paragonabile a un romanzo di formazione del narratore stesso: un viaggio con un significato epistemologico profondo, che porta a una presa di coscienza di un nuovo modo di conoscere, un modo di conoscere sofisticato e per nulla "naturale", ma insito nelle strutture narrative del linguaggio. In effetti, quello che Lolli prefigura nel suo libro è una possibile crescita "senza fratture dall'età delle fiabe a quella della conoscenza scientifica" (Lolli, 2018, p. 13).

Suggeriamo a tutti gli insegnanti di matematica di leggere e meditare questo libro, ma di considerarlo appunto, come un invito a prendere in seria considerazione gli aspetti narrativi della matematica, anche nell'ipotesi che questo atteggiamento, questo aspetto, possa essere di un qualche aiuto nella prassi didattica. Sentirsi raccontare la matematica, anziché vedersela imporre, potrebbe agevolare quegli studenti che, pur capaci, hanno perso qualcosa nel contatto iniziale con la nostra disciplina; e questo potrebbe essere il primo passo verso una propria personale narrazione matematica di ciascuno studente. Chissà.

Riferimenti bibliografici

Barthes, R. (1967). Science versus literature. *The Times Literary Supplement*, 28 settembre 1967, p. 897.

Calvino, I. (1957). *Il barone rampante*. Torino: Einaudi.

Calvino, I. (1967). Lettera ad Anna Maria Ortese. *Il Corriere della Sera*, 24 dicembre 1967, p. 11.
Calvino, I. (1968). *Due interviste su scienza e letteratura*. Milano: Mondadori.
Galilei, G. (1992). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Pordenone: Edizioni Studio Tesi.
Lolli, G. (1988). *Capire una dimostrazione*. Bologna: il Mulino.
Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. Bologna: il Mulino.
Propp, V. J. (1966). *Morfologia della fiaba*. Torino: Einaudi. (Lavoro originale pubblicato in lingua russa nel 1928).

Miglena Asenova e Bruno D'Amore

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli (2018). *La matematica e la sua storia: Dagli ultimi bagliori della Grecia antica alla fine del Medioevo.* Volume II. Bari: Dedalo.

La matematica è considerata una delle massime espressioni del pensiero umano e, con l'introduzione del metodo scientifico galileiano, la regina di tutte le scienze. Eppure, troppo spesso, vive una sorta di isolamento culturale. Nella scuola superiore, la separazione, del tutto ingiustificata, tra le discipline umanistiche e quelle scientifiche è particolarmente marcata. Nei percorsi universitari, ci si concentra soprattutto sugli aspetti tecnici e formali della matematica, se non si considerano gli indirizzi di studio che richiedono gli approfondimenti storici e fondazionali. Occorre ricordare che la matematica è un'esperienza umana, inscindibile dal clima sociale, storico e culturale in cui è nata e in cui successivamente si è sviluppata. Un clima fatto di visioni del mondo, convinzioni, credenze, valori, passioni, bisogni ideali e materiali … Per dirlo con le parole di Bruno e Silvia, tratte dalla premessa al primo volume de *La matematica e la sua storia*, "per noi la matematica è un umanesimo".

Senza questa consapevolezza, perdiamo la ricchezza e la profondità della matematica che, non a caso, è troppo spesso considerata una disciplina arida, un mero calcolo formale. Invece, come ci insegna Luis Radford, la matematica è un'attività umana che si sviluppa in virtù dell'uso di artefatti culturali, materiali e ideali. La complessa trasformazione di segni che caratterizza il pensiero matematico non può e non deve dimenticare che tali segni condensano il lungo percorso, durato anche millenni, che l'uomo ha compiuto nell'interpretare e dare significato matematico alla sua esperienza del mondo. La scuola spesso dimentica la densità culturale intrinseca ai segni e agli artefatti utilizzati nella pratica matematica in aula, con due conseguenze importanti sull'apprendimento degli studenti:

- allo sviluppo cognitivo dell'alunno mancano alcuni passaggi chiave per costruire la complessa rete concettuale che caratterizza il sapere matematico;
- gli allievi percepiscono la matematica come arida, insignificante e "disincarnata", e la studiano con una relazione affettiva negativa caratterizzata da rifiuto, paura, mancanza di motivazione e volizione.

La storia della matematica introduce il lettore alla ricchezza e alla profondità della matematica, accompagnandolo nella complessità del suo sviluppo, che include aspetti filosofici, scientifici, letterari, artistici, politici … Se il primo volume ha analizzato lo sviluppo della matematica dalla sua nascita fino alle vette raggiunte dalla matematica greca, il secondo ne descrive gli ultimi bagliori per spostare poi l'attenzione del lettore su quella etrusca e latina fino al Medioevo. È particolarmente interessante la parte dedicata alla matematica dell'Asia (India e Cina) e delle Americhe (Maya, Aztechi e Inca). Uno sguardo interculturale che apre interessanti considerazioni concettuali, didattiche e pedagogiche.

Il testo permette di rivivere la genesi dei più importanti concetti matematici e di considerarli da più punti di vista, tenendo come riferimento l'essere umano, sempre inserito nel suo specifico contesto sociale, storico e culturale. Per esempio, l'opera permette un confronto tra la logica aristotelica, quella megarico-stoica e la logica indiana nyaya, un confronto che, oltre all'interesse storico e concettuale, apre considerazioni molto profonde sulla didattica della dimostrazione. Lo stesso vale per il confronto, che l'opera permette di sviluppare, tra il concetto di numero nelle diverse civiltà; trovo di particolare interesse didattico l'approfondimento sullo sviluppo dei sistemi di numerazione nelle Americhe per la profondità delle riflessioni sugli aspetti concettuali, algoritmici e semiotici dell'apprendimento, che se ne possono ricavare.

Gli aspetti matematici sono spiegati in modo chiaro ed esaustivo, rimandando anche a una ricca bibliografia. Il testo può essere letto come una storia della matematica ma anche come un libro di storia narrato con gli occhi della matematica.

Un libro che mi sento di consigliare a chiunque nutra interesse per la matematica, in particolare al docente di matematica. Egli potrà approfondire la sua preparazione disciplinare e, al contempo, trovare spunti per migliorare la propria didattica e strumenti per comprendere alcune delle difficoltà di apprendimento dei suoi studenti.

George Santi

Prieto Fandiño, J. L. (2018). *La componente rappresentativa dell'architettura*. Bologna: Pitagora.

Fra tutti i domini artistici, l'architettura è quella che maggiormente usa conoscenze geometriche. L'originalità di questo libro è di guardare alla grande diversità delle rappresentazioni che devono essere messe in atto prima che inizi la costruzione di un'opera destinata a compiere una funzione simbolica, culturale o economica nella vita sociale. Queste rappresentazioni, che vanno dalla concezione alla costruzione dell'opera, sono rappresentazioni semiotiche, alcune ovviamente geometriche e le altre, altrettanto importanti, no. E questo fatto pone tre domande per capire il lavoro di creazione e produzione in architettura. Quali tipi di rappresentazioni semiotiche? Per quale funzione esse vengono prodotte? Infine: In quale ordine il lavoro di creazione progredisce, fino alla loro costruzione reale?

Questo libro si concentra sulle prime due domande. Tutte le rappresentazioni prodotte per l'elaborazione e la realizzazione di un progetto sono analisi in funzione di tre tipi di attività cognitivamente ed epistemologicamente diverse: vedere, rappresentare e costruire. Ciò porta a privilegiare la questione della funzione delle rappresentazioni rispetto a quella della loro natura, come i singoli titoli dei capitoli opportunamente indicano. E, attraversando tutti i capitoli, si ritrova proprio la varietà semiotica delle rappresentazioni prodotte: rappresentazioni iconiche strumentalmente disegnate per il piano di un edificio o per la sua facciata; schemi non iconici a mano libera per evocare la forma globale vista in prospettiva; figure geometriche per calibrare, per esempio, il rigonfiamento delle colonne in modo tale che, a distanza, esse appaiano perfettamente diritte; prospettiva cavaliera dei solidi che saranno costruiti; ecc. L'ultimo capitolo, e soprattutto le pagine 97–100, fornisce una risposta alla terza domanda sistemando, secondo un ordine logico, i diversi tipi di rappresentazioni semiotiche prodotte per elaborare e realizzare un progetto in architettura.

La lettura di questa opera solleva due domande.

La prima riguarda l'ordine logico presentato. Non potrebbe essere quello opposto? Perché è necessario partire dal modo in cui l'opera, quando sarà materialmente costruita, apparirà allo sguardo dall'esterno, e anche all'interno, quando vi si entrerà. In definitiva, non ci potrebbe essere un'interazione tra la fase finale e ciascuna delle fasi precedenti?

La seconda domanda è essenziale e va ben oltre il lavoro dell'architetto, perché tutte le rappresentazioni sono semioticamente di natura diversa. Alcune sono rappresentazioni piane (2D/2D) e altre sono rappresentazioni in prospettiva (3D/2D). Inoltre, alcune sono rappresentazioni iconiche, altre sono schemi e altre ancora sono figure geometriche. In che modo tutte queste rappresentazioni si articolano l'una con l'altra per mostrare o concepire quello stesso oggetto che sarà poi l'edificio costruito?

Queste domande mostrano le strade che forse questo libro apre per la ricerca non solo in didattica dell'architettura, ma sicuramente per quella sull'insegnamento della geometria.

Reseña (en español)

Entre todos los dominios artísticos, la arquitectura es la que utiliza con mayor razón el conocimiento geométrico. La originalidad de este libro está en la observación de la gran diversidad de representaciones que deben implementarse antes de que comience la construcción de una obra destinada a cumplir una función simbólica, cultural o económica en la vida social. Estas representaciones, que van desde la concepción hasta la construcción de la obra, son representaciones semióticas, algunas obviamente geométricas y las otras, igual de importantes, no. Y esto plantea tres preguntas para comprender el trabajo de creación y producción en arquitectura. ¿Qué tipos de representaciones semióticas? Y, ¿para qué función se producen? Finalmente: ¿En qué orden para que el trabajo de la creación avance hacia la construcción real?

Este libro se enfoca en las primeras dos preguntas. Todas las representaciones producidas para la concepción y la realización de un proyecto son analizadas en función de tres tipos de actividades cognitiva y epistemológicamente diferentes: ver, representar y construir. Esto conduce a privilegiar la cuestión de la función de las representaciones con respecto a su naturaleza, como oportunamente indican los títulos de cada capítulo. Y, a través de todos los capítulos, se reconoce exactamente la variedad semiótica de las representaciones producidas: representaciones icónicas instrumentalmente diseñadas por la planta de un edificio o de su fachada; esquemas no icónicos a mano alzada para evocar la forma global vista en perspectiva; figuras geométricas para calibrar, por ejemplo, la éntasis de las columnas de forma tal que, a distancia, parezcan perfectamente derechas; perspectiva clásica de los sólidos que serán construidos; etc. El último capítulo, y especialmente las paginas 97-100, ofrece una respuesta a la tercera pregunta sistematizando, de acuerdo a un orden lógico, los diferentes tipos de representaciones semióticas producidas para desarrollar y realizar un proyecto en arquitectura.

La lectura de este libro plantea dos preguntas.

La primera se refiere al orden lógico presentado. ¿No podría ser el orden opuesto? Dado que es necesario partir del modo en el cual la obra, cuando será materialmente construida, aparecerá a la mirada del exterior y también al interior, cuando se entra en ella. ¿En resumidas cuentas, no podría existir una interacción entre la fase final y cada una de las fases anteriores?

La segunda pregunta es esencial y va más allá del trabajo del arquitecto, dado que todas las representaciones son de naturaleza semióticamente diferente. Algunas son representaciones planas (2D/2D) y otras representaciones en perspectiva (3D/2D). Además, algunas son representaciones icónicas, otras son esquemas y otras son figuras geométricas. ¿Cómo se articulan todas estas representaciones entre sí para mostrar o concebir aquel mismo objeto que será, al final, el edificio construido?

Estas preguntas muestran las rutas que tal vez este libro abre para la investigación no sólo en didáctica de la arquitectura, sino también seguramente para la enseñanza de la geometría.

Raymond Duval

ELMI, raccolta di Elenchi di Link a pagine per la Matematica in Italia

La Biblioteca matematica dell'Università degli Studi di Milano ha effettuato la quinta immissione in internet di dati per ELMI, raccolta di Elenchi di Link a pagine per la Matematica in Italia:
http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-ABB.htm.

La raccolta è curata da Gabriele Lucchini e Alberto Marini con la collaborazione di Giuliano Moreschi, direttore della Biblioteca, ed è comparsa in rete nel giugno 2017.

Inizialmente rivolta a proporre pagine bio-bibliografiche, è stata poi ampliata alle 28 sezioni attualmente proposte nella mappa ELMI-MAP,
http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-Map.htm
direttamente raggiungibile in Google.

Il file più consistente è ELMI-ABB.htm - Anagrafe Bio-Bibliografica che presenta 5558 persone (di cui 1088 donne) con 10873 link (c'è un file di dati statistici http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-Stat.htm).

I curatori hanno presentato la raccolta in:
http://www.matmedia.it/elmi-elenchi-link-pagine-sulla-matematica-italia/

Ulteriori informazioni sono nell'invito a consultare ELMI di
http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g409.htm,
dove è segnalato che i fogli di stampa a 100% sono 298.

La matematica e la sua didattica, Anno 26, n. 2, 2018
ISSN 1120-9968